CHAPITRE 1 - COMPLEMENT :

RAPPELS DE MATHEMATIQUES

TABLE DES MATIERES

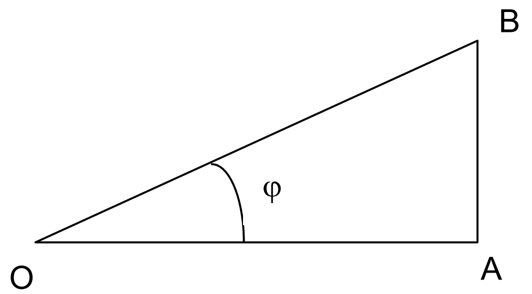
ISBN : 978-2-9544675-1-1

1 INTRODUCTION

Ce petit rappel de mathématiques, contient toutes les démonstrations de base nécessaires pour aborder la suite de cet ouvrage, et les formulaires associés. Il s'inspire du Cours élémentaire de mathématiques supérieures rédigé par Monsieur J QUINET (Editions DUNOD 1951).

D'autres rappels : probabilités ; traitement du signal... sont introduits dans les différents chapitres chaque fois que cela est nécessaire.

2 LIGNES TRIGONOMETRIQUES

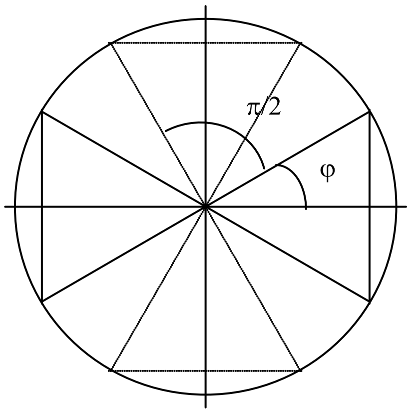


$$\cos(\varphi) = OA/OB$$

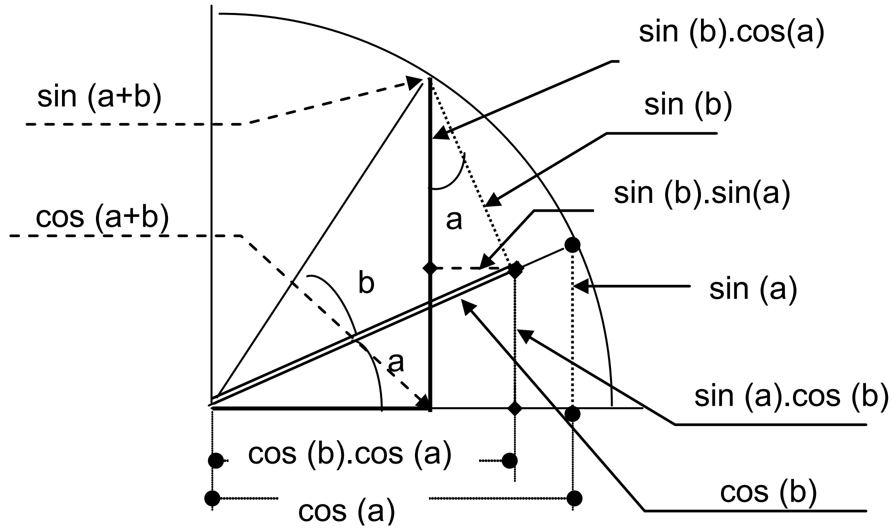
$$\sin(\varphi) = AB/OB$$

$$\sin(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2 = 1$$

$$\text{car : } (OB)^2 = (OA)^2 + (AB)^2$$



$\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$	$\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$
$\sin(\pi-\varphi) = \sin(\varphi)$	$\cos(\pi-\varphi) = -\cos(\varphi)$
$\sin(\pi+\varphi) = -\sin(\varphi)$	$\cos(\pi+\varphi) = -\cos(\varphi)$
$\sin(\pi/2-\varphi) = \cos(\varphi)$	$\cos(\pi/2-\varphi) = \sin(\varphi)$
$\sin(\pi/2+\varphi) = \cos(\varphi)$	$\cos(\pi/2+\varphi) = -\sin(\varphi)$



A découvrir sur la figure (cercle de rayon unité) :

$$\sin(a + b) = \sin(a).\cos(b) + \sin(b).\cos(a)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a).\cos(b) - \sin(a).\sin(b)$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

On en déduit facilement :

$$\sin(2a) = 2.\sin(a).\cos(a)$$

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2.\cos^2(a) - 1$$

Et en posant $a = (u+v)/2$ et $b = (u-v)/2$
soit : $a+b = u$ et : $a-b = v$:

$$\cos(a)-\cos(b) = 2\sin((a-b)/2).\sin((a+b)/2)$$

$$\sin(a)-\sin(b) = 2\sin((a-b)/2).\cos((a+b)/2)$$

3 FONCTIONS EXPONENTIELLE ET LOGARITHMIQUE

3.1 DEFINITION DE “E” :

$$e = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n}\right]^n = 2{,}718...$$

3.2 FONCTION EXPONENTIELLE :

$$y = a^x \text{ ; avec : } a > 0$$

$$x = 0 \rightarrow y = 1$$

$$x = 1 \rightarrow y = a$$

$$y = a^{(x1+x2)} = a^{x1}.a^{x2}$$

$$a^0 = a^x.a^{-x} = 1 \rightarrow a^{-x} = 1/a^x$$

3.3 FONCTION LOGARITHMIQUE :

C’est la fonction inverse de la précédente

$$X = \log_a(y)$$

Par définition, la base d’un logarithme est le nombre pour lequel le logarithme est égal à 1.

Exemple base 10 : $10^1 = 10$; $10^2 = 100$; $10^3 = 1000$…d’où le tableau suivant :

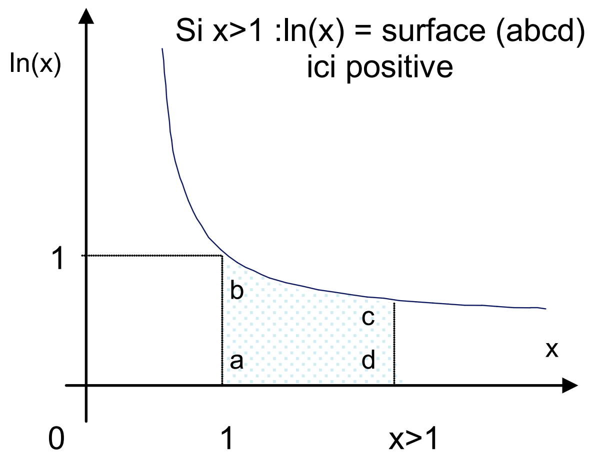
$\log_{10}(y)$	1	2	3	4	5	n
Y	10	100	1 000	10 000	100 000	10^n

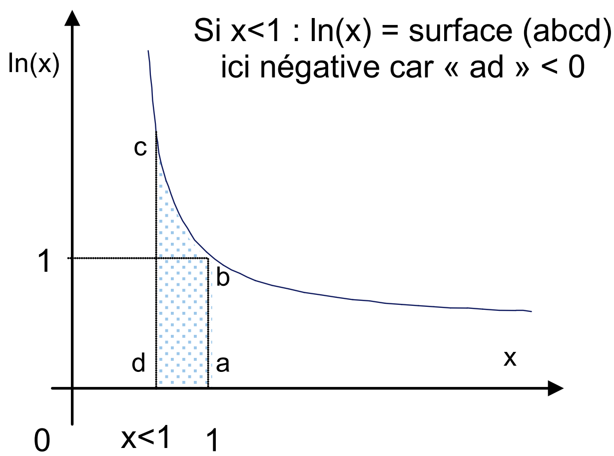
On remarque que le logarithme fait correspondre une progression géométrique à une progression arithmétique, ce qui permet intuitivement d’écrire (et sera justifié au § 3.4) :

$$\log_a(y_1.y_2) = \log_a(y_1) + \log_a(y_2)$$

3.4 LOGARITHME NEPERIEN : LN(X)

Soit la courbe $Y = 1/x$; par définition, à partir de $x = 1$:

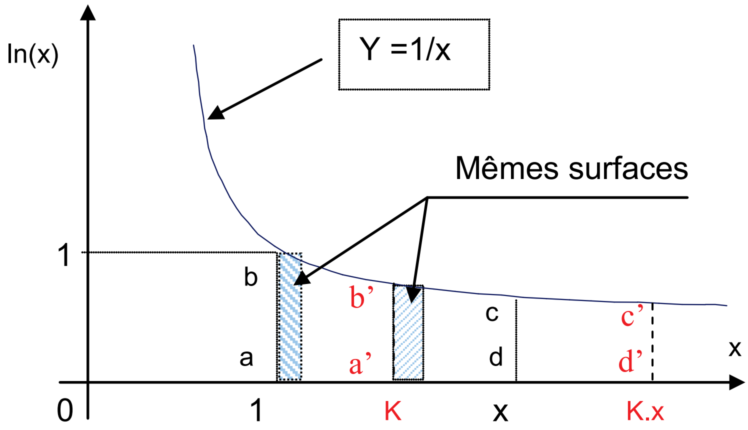




ISBN : 978-2-9544675-1-1

3.4.1 Première propriété de ln(x)

Considérons maintenant les deux surfaces comprises entre les abscisses 1 et x : surface (abcd) et entre les abscisses K et K.x : surface (a'b'c'd') :



Si on divise « ad » et « a'd' » en n parties égales elles portent les mêmes surfaces 2 à 2, chaque élément de « a'd' » étant K fois plus long que l'élément correspondant de « ad » mais, la fonction variant comme 1/x, de hauteur K fois plus faible.

On peut en déduire que :

surface (abcd) = surface (a'b'c'd') → surface (aba'b') = surface (cdc'd')

car ces deux surfaces ont comme partie commune, la surface (a'b'cd), donc :

surface (abc'd') = surface (abcd)+ surface (cdc'd')

surface (abc'd') = surface (abcd)+ surface (aba'b')

soit : $\ln(K.x) = \ln(x) + \ln(K)$

3.4.2 Autres propriétés

$$\ln(1) = 0$$

$$\ln(0) = -\infty$$

$$\ln(\infty) = \infty$$

$$\ln(1/x) = -\ln(x)$$

$$\ln(x^n) = n.\ln(x)$$

3.4.3 Base du logarithme népérien

Par définition, c'est la valeur de x telle que ln(x) = 1, or on démontre (voir plus loin § 4 : développements en série) que

$$\lim_{\alpha \to 0}\left(\ln(1+\alpha)\right) = \alpha$$

Appliquons cette propriété à : ln(e)

$$\lim_{n \to \infty}\left[\ln(1+\frac{1}{n})^n\right] = \lim_{n \to \infty}\left[n.\ln(1+\frac{1}{n})\right] = \frac{n}{n} = 1$$

Donc : $\ln(e) = 1$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

3.4.4 Fonction inverse de ln(x)

Considérons la fonction ;

$$x = e^y$$

Prenons le logarithme népérien des deux membres :

$$\ln(x) = y.\ln(e) = y, \text{ car } \ln(e) = 1$$

$$y = \ln(x)$$

Donc la fonction exponentielle $x = e^y$ est la fonction inverse de $y = \ln(x)$, comme la fonction $x = 10^y$ est la fonction inverse de $y = \log_{10}(x)$.

On remarquera que $\ln(x) = \log_e(x)$ et on notera : $\log_{10}(x) = \log(x)$.

3.4.5 Rapport entre log népériens et log décimaux

Soit la fonction : $X = a^y$ dont la fonction inverse est $y = \log_a(x)$

Prenons le logarithme de ce nombre dans une base « b »

$$\log_b(x) = \log_b(a^y) = y.\log_b(a)$$

et en remplaçant y par sa valeur :

$$\boxed{\log_b(x) = \log_a(x).\ \log_b(a)}$$

Tous les logarithmes sont proportionnels les uns des autres. Toutes propriétés démontrées sur l'une des bases est, à cette nuance près, applicables dans les autres bases.

On aura en particulier :

$$\log(x) = \ln(x).\log(e) = 0{,}434.\ln(x)$$

$$\ln(x) = \log(x).\ln(10) = 2{,}3.\log(x)$$

3.4.6 Généralisation de la fonction exponentielle

Soit la fonction : $y = a^x$

$$\ln(y) = x.\ln(a) \text{ , soit en prenant la fonction inverse : } y = e^{x.\ln(a)}$$

et en remplaçant y par sa valeur a^x :

$$a^x = e^{x.\ln(a)}$$

ou, (autre notation)

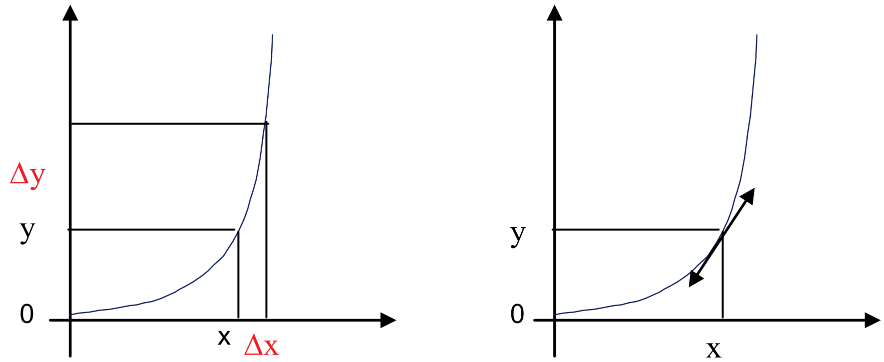
$$a^x = \exp\{x.\ln(a)\}$$

Ce qui généralise l'expression des fonctions exponentielles à partir de l'exponentielle e^x et permet d'en déduire leurs propriétés.

ISBN : 978-2-9544675-1-1

4 LES DERIVEES

4.1 DEFINITIONS



La dérivée d'une fonction y(x) est définie par la relation :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

C'est la pente de la tangente à la courbe y(x) à l' abscisse : x

4.2 QUELQUES DERIVEES TYPE

4.2.1 Dérivée d'une puissance

$$Y = x^m \quad \Rightarrow\Rightarrow y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^m - x^m}{\Delta x} = m.x^{m-1}$$

$$Y = a.x^m \quad \Rightarrow\Rightarrow y' = a.m.\ x^{m-1}$$

Cas particuliers :

$$Y = x^{-1} \quad \Rightarrow\Rightarrow y' = -1.x^{-2}$$

$$Y = x^{1/2} \quad \Rightarrow\Rightarrow y' = 1/2.x^{-1/2}$$

4.2.2 Dérivées des lignes trigonométriques

$$\mathrm{Cos}(x+\Delta x) = \cos(x).\cos(\Delta x) - \sin(x).\sin(\Delta x) \cong \cos(x) - \sin(x).\Delta x$$

D'où la dérivée de cos(x) :

$$\frac{d(\cos(x))}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{d(\cos(x))}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin(x).\Delta x}{\Delta x} = -\sin(x)$$

de même :

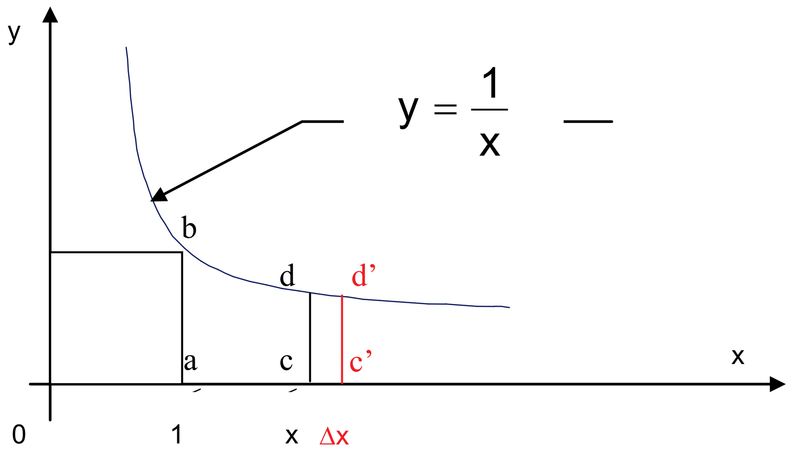
$$\frac{d(\sin(x))}{dx} = \cos(x)$$

$$\frac{d(tg(x))}{dx} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

4.2.3 Dérivée de la fonction logarithmique – log népérien

Revenons à la définition du logarithme népérien :



$$\ln(x) = \text{surface (abcd)}$$

$$\ln(x + \Delta x) = \text{surface (abc'd')}$$

$$\ln(x + \Delta x) - \ln(x) = \text{surface (cdc'd')} \sim (1/x).\Delta X$$

$$\boxed{\frac{d(\ln(x))}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\ln(x+\Delta x) - \ln(x)}{\Delta x}\right] = \frac{1}{x}}$$

4.2.4 Dérivée de la fonction exponentielle

Soit la fonction $y = e^x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

$$\text{posons}: e^{\Delta x} - 1 = \frac{1}{m};\ \text{si}\ \ \Delta x \to 0\ :\ m \to \infty$$

$$e^{\Delta x} = 1 + \frac{1}{m}\ \ \text{soit}\ :\Delta x = \ln(1 + \frac{1}{m})$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x\ \frac{1}{m}\ \frac{1}{\ln(1+\frac{1}{m})} = e^x\ \frac{1}{m.\ln(1+\frac{1}{m})} = e^x\ \frac{1}{\ln\left[(1+\frac{1}{m})^m\right]}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{m \to \infty} e^x\ \frac{1}{\ln\left[(1+\frac{1}{m})^m\right]} = \frac{e^x}{\ln(e)} = e^x$$

$$\boxed{\frac{d(e^x)}{dx} = e^x}$$

La fonction $y = e^x$ est sa propre dérivée.

ISBN : 978-2-9544675-1-1

4.2.5 Dérivées de fonctions algébriques

$$y = u + v \Rightarrow y' = u' + v' \Rightarrow dy = du + dv$$
$$y = u.v \Rightarrow y' = u.v' + v.u' \Rightarrow dy = u.dv + v.du$$
$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{v.u' - u.v'}{v^2} \Rightarrow dy = \frac{v.du - u.dv}{v^2}$$

4.2.6 Dérivées de fonctions de fonctions

Posons :

$$Y = f(u)$$
$$u = g(x)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$
$$\boxed{y'_x = y'_u.u'_x}$$

Relation généralisable à un nombre quelconque de variables.

4.2.7 Dérivées successives

On notera :

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$
$$y''' = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3}$$

5 DEVELOPPEMENTS EN SERIE

5.1 FORMULE DE MAC – LAURIN

Soit une fonction f(x) pouvant s'écrire sous la forme d'un polynôme :

$$y = f(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + a_3.x^3 + ... + a_n.x^n + ...$$

calculons ses dérivées successives :

$$f'(x) = a_1 + 2.a_2.x + 3.a_3.x^2 + 4.a_4.x^3 + ... \Rightarrow f'(0) = a_1$$
$$f''(x) = 2.a_2 + 2.3.a_3.x + 3.4.a_4.x^2 + ... \Rightarrow f''(0) = 2a_2$$
$$f'''(x) = 2.3.a_3 + 2.3.4.a_4.x + ... \Rightarrow f'''(0) = 2.3.a_3$$
$$f''''(x) = 2.3.4.a_4 + ... \Rightarrow f''''(0) = 2.3.4.a_4$$

D'où une expression de f(x), (avec : 4! = 4.3.2.1 et : n! = n.(n-1).(n-2)…3.2.1) :

$$\boxed{f(x) = f(0) + x.f'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + ... + \frac{x^n}{n!}f^n(0) + ...}$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

5.1.1 Exemples

La fonction e^x est sa propre dérivée et $e^0 = 1$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

$$e^{kx} = 1 + k.x + \frac{k^2x^2}{2} + \frac{k^3x^3}{3!} + ... + \frac{k^nx^n}{n!} + ..$$

La dérivée de cos(x) est –sin(x) et la dérivée de sin(x) est cos(x) ; sin(0) = 0 et cos(0) = 1

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$

5.2 FORMULE DE TAYLOR

On peut également développer une fonction autour d'une valeur quelconque de la variable x : x_0. si on pose $h = x - x_0$ et $g(h) = f(X_0 + h)$ on peut écrire :

$$g(h) = g(0) + h.g'(0) + \frac{h^2}{2}g''(0) + \frac{h^3}{3!}g'''(0) + ... + \frac{h^n}{n!}g^n(0) + ...$$

$$\boxed{f(x_0 + h) = f(x_0) + h.f'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + ... + \frac{h^n}{n!}f^n(x_0) + ...}$$

5.2.1 Exemple

$$\ln(x_0 + \alpha) = \ln(x_0) + \alpha\frac{1}{x_0}....$$

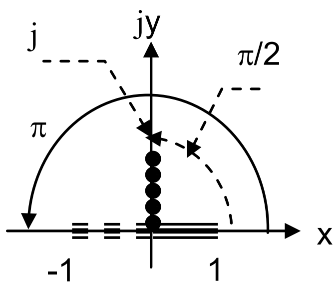
Ce qui donne pour $x_0 = 1$ ($\ln(1) = 0$ et $1/x_0 = 1$) :

$$\boxed{\lim_{\alpha \to 0}\left(\ln(1 + \alpha)\right) = \alpha}$$

relation utilisée au § 2.4-c.

6 LES NOMBRES COMPLEXES

6.1 L'OPERATEUR « ROTATION π/2 »



Considérons un vecteur dans un plan.

L'opérateur qui fait tourner un vecteur de « π » est « –1 »

L'opérateur qui fait tourner un vecteur de « π/2 » est « j »

On remarque que

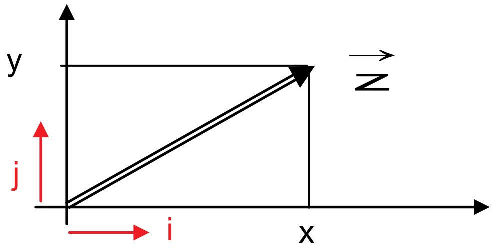
$$j^2 = -1$$

Inversement : $\sqrt[2]{-1} = j$

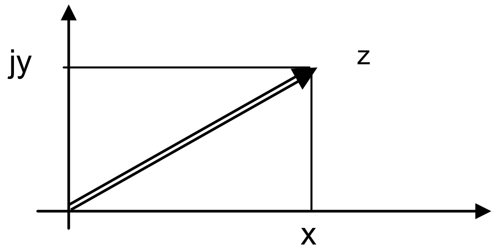
ISBN : 978-2-9544675-1-1

6.2 ECRITURE CARTESIENNE DES NOMBRES COMPLEXES

Tout vecteur du plan peut s'écrire en espace orthonormé : $\vec{z} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y$

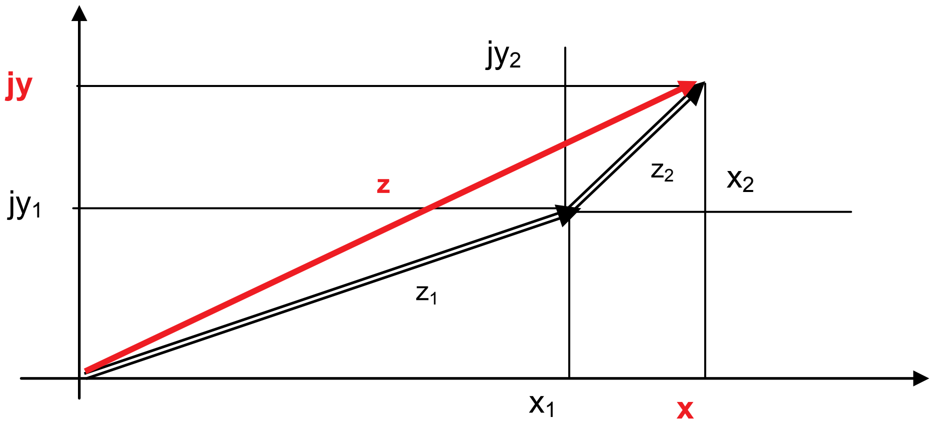


En posant : i =1 et : j = rotation $\pi/2$ on représente ce vecteur par la variable complexe : z = x + jy



- x est la partie réelle du nombre complexe z : Réel(z)
- jy est la partie imaginaire du nombre complexe z : Img(z)

6.3 SOMME DE DEUX NOMBRES COMPLEXES



Soit z le vecteur somme de z_1 et z_2. On vérifie que les projections de z sur les deux axes sont respectivement : $x_1 + x_2$ et $y_1 + y_2$, ce qui s'écrit en notations complexes :

$$\boxed{z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j.(y_1 + y_2)}$$

6.4 ECRITURE POLAIRE DES NOMBRES COMPLEXES

On part de l'expression :

$$e^{kx} = 1 + k.x + \frac{k^2x^2}{2} + \frac{k^3x^3}{3!} + \ldots + \frac{k^nx^n}{n!} + ..$$

$$e^{j\varphi} = 1 + j.\varphi - \frac{\varphi^2}{2} - \frac{j\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{j\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - \frac{j\varphi^7}{7!}$$

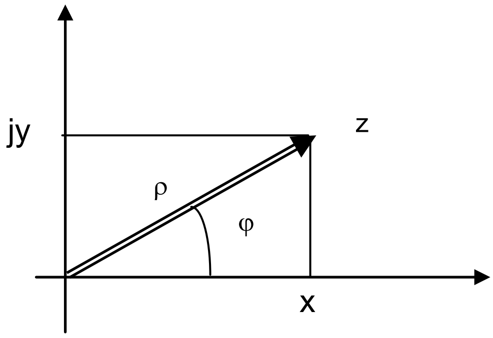
$$e^{j\varphi} = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \ldots + j.\left[\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \ldots\right]$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\boxed{e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j.\sin(\varphi)}$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

Par ailleurs le shéma suivant présente :



$$z = x + j.y = \rho.\cos(\varphi) + j.\rho.\sin(\varphi) = \rho.e^{j\varphi}$$

D'où une nouvelle écriture des nombres complexes en coordonnées polaires :

$$\boxed{z = \rho.e^{j\varphi}}$$

- ρ est le module du nombre complexe z
- φ est l'argument du nombre complexe z

6.5 PRODUIT DE DEUX NOMBRES COMPLEXES

De part les propriétés de la fonction exponentielle « e » on peut écrire :

- $z_1 = \rho_1\, e^{j\varphi 1}$
- $z_2 = \rho_2\, e^{j\varphi 2}$

$$\boxed{z = z_1.z_2 = \rho_1.\rho_2.e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}}$$

6.6 CONJUGUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

6.6.1 Définition :

$$z = x + jy = \rho.e^{j\varphi} \rightarrow z^* = x - jy = \rho.e^{-j\varphi}$$

6.6.2 Propriétés

$$z.z^* = x^2 + y^2 = \rho^2$$
$$z + z^* = 2.x = 2.\text{Réel}(z)$$

6.7 EXPRESSION COMPLEXE DES LIGNES TRIGONOMETRIQUES

On part des expressions :

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j.\sin(\varphi)$$
$$e^{-j\varphi} = \cos(\varphi) - j.\sin(\varphi)$$

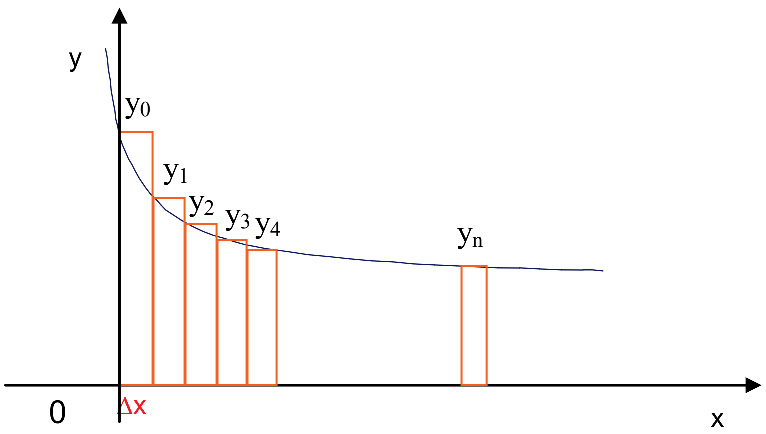
Ce qui permet d'écrire :

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}} \text{ et } \boxed{\sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2.j}}$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

7 NOTIONS DE CALCUL INTEGRAL

7.1 PREMIERE DEFINITION : APPROCHE PHYSIQUE



Soit à calculer une surface comprise entre l'axe des « x » et une fonction : $y = f(x)$

On peut la décomposer en une suite de rectangles de largeur Δx et de hauteurs successives

$$y_k = f(k.\Delta x)$$

La surface ainsi estimée s'écrira :

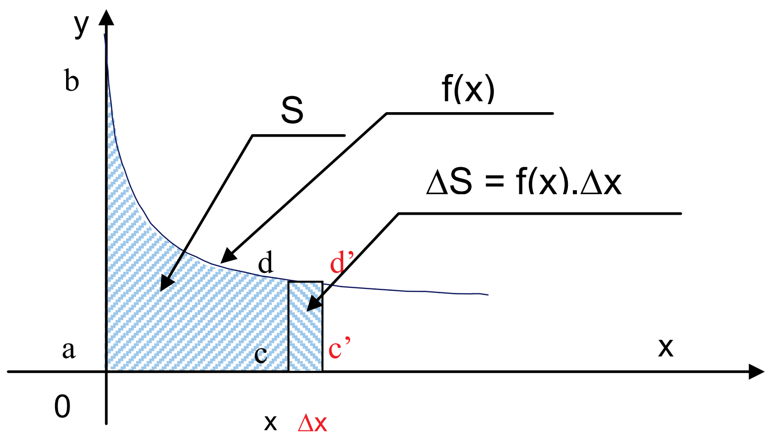
$$S = \Sigma\left[f(k.\Delta x).\Delta x\right]$$

Ce calcul deviendra d'autant plus exact que Δx sera petit.

A la limite pour $\Delta x \rightarrow 0$, on aboutit à une somme en nombre infiniment grand de quantités infiniment petites, qui s'écrit symboliquement, en posant $k.\Delta x = x$:

$$\boxed{S = \int f(x).dx}$$

7.2 DEUXIEME DEFINITION : FONCTION PRIMITIVE



Soit F(x) la fonction représentant la surface S :

$$F(x) = S = \text{surface }(abcd)$$

$$F(x + \Delta x) = \text{surface }(abc'd')$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta S = \text{surface (cdc'd')} = f(x)\,.\Delta X$$

$$\boxed{\frac{d(F(x))}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}\right] = f(x)}$$

et, à une constante près, F(x) étant définie par sa dérivée :

$$S = F(x) = \int f(x).dx$$

La primitive de la fonction f(x) est, à une constante près, la fonction F(x) dont f(x) est la dérivée.

7.3 INTEGRALE INDEFINIE

L'expression précédente se généralise en faisant apparaître la constante soit :

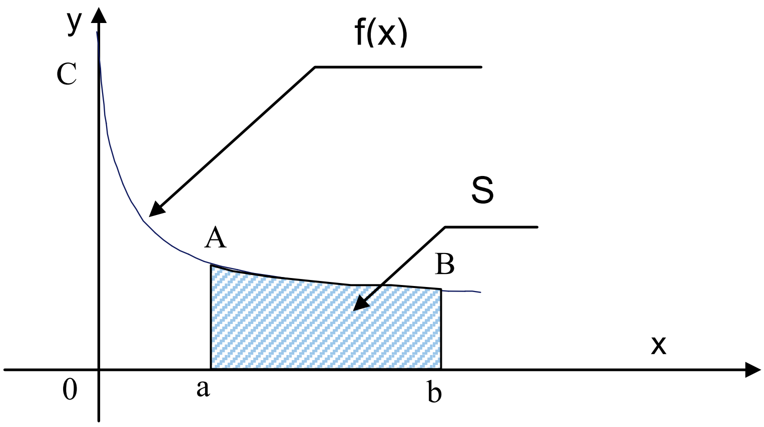
$$\boxed{S = F(x) + K = \int f(x).dx}$$

Cette fonction est une fonction linéaire en particulier si a et b sont des constantes :

$$\int a.f(x).dx = a.\int f(x).dx$$

$$\int [a.f(x) + b.g(x)].dx = a.\int f(x).dx + b.\int g(x).dx$$

7.4 INTEGRALE DEFINIE



Soit à calculer la surface finie S = surface(aABb). On peut l'écrire :

$$S = \int_a^b f(x).dx$$

On choisit arbitrairement le point x = 0 comme origine des surfaces, ce qui permet d'écrire :

Surface(0CAa) = F(a) + K ; Surface(0CBb) = F(b) + K

S = Surface(aABb) = Surface(0CBb) - Surface(0CAa) = F(b) – F(a)

$$\boxed{S = \int_a^b f(x).dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

7.5 QUELQUES PRIMITIVES UTILES

f(x)	F(x)
x^m	$x^{m+1}/(m+1)$
x^{-1}	ln(x)
$x^{-1/2}$	$2.x^{1/2}$
e^x	e^x
sin(x)	-cos(x)
cos(x)	sin(x)
$1/\cos^2(x)$	tg(x)
$1/(1+x^2)$	Arc tg(x)

7.6 QUELQUES PROCEDES D'INTEGRATION

(Uniquement pour mémoire)

7.6.1 Intégration par substitution

Le principe est de se ramener à une primitive connue, par un changement de variable, par exemple :

$$\int e^{-2x} dx$$

on pose u =-2x ; du = -2dx ; dx = -du/2

$$\int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}\int e^{u}.du = -\frac{e^{u}}{2}$$

$$\int e^{-2x} dx = -\frac{e^{-2x}}{2}$$

7.6.2 Intégration par parties

On part de la dérivée d'un produit :

$$d(u.v) = v.du + u.dv$$
$$u.dv = d(u.v) - v.du$$

et en intégrant le deux membres :

$$\int u.dv = \int d(uv) - \int v.du$$

et en retenant la définition de la primitive :

$$\boxed{\int u.dv = u.v - \int v.du}$$

ce qui permet de substituer le calcul de l'intégrale de u.dv par celui de l'intégrale de v.du, qui sera peut être plus facile à réaliser !

ISBN : 978-2-9544675-1-1

7.7 QUELQUES RESULTATS UTILES

(Uniquement pour mémoire)

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x)\ .dx = [\sin(x)]_{-\pi}^{+\pi} = 0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2(x)\ .dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos(2x))\ .dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{m}.e^{-\frac{x}{m}}.dx = e^{-\frac{x}{m}}.d\frac{x}{m} = [-e^{-\frac{x}{m}}]_0^{\infty} = 1$$

et aussi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}.dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}.dx = \pi$$

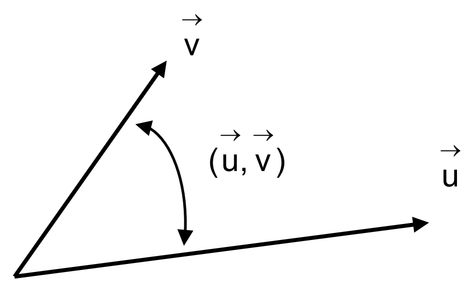
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = \pi$$

8 PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS

8.1 DEFINITION DE BASE

Il existe plusieurs définition du produit scalaire.

Sans entrer dans la rigueur des espaces hermitiens, nous retiendrons la définition simple, du produit scalaire, écrite dans le plan formé par ces deux vecteurs :



1er Définition du produit scalaire

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| * \|\vec{v}\| * \cos(\vec{u}, \vec{v})}$$

Propriétés de base

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}\ ;$$

$$(\alpha\,\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(\alpha\,\vec{v}) = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$$

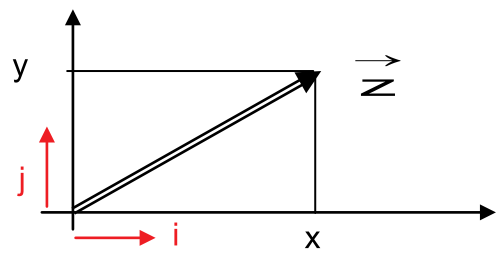
$$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$$

$$\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

8.2 EXPRESSION ANALYTIQUE

Tout vecteur du plan peut s'écrire en espace orthonormé :

$$\vec{z} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y$$



Avec :

$$\vec{i}\,.\,\vec{i} = \vec{j}\,.\,\vec{j} = 1 \text{ et } \vec{i}\,.\,\vec{j} = 0$$

Soit :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = (\vec{i}\,x_u + \vec{j}\,y_u).(\vec{i}\,x_v + \vec{j}\,y_v) = x_u x_v + y_u y_v$$

2ème définition du produit scalaire

$$\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = x_u x_v + y_u y_v}$$

Ce qui est également choisi comme définition du produit scalaire dans un espace orthonormé.

On a notamment :

$$\vec{u}\,.\,\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = x_u^2 + y_u^2$$

8.3 NOTATIONS SIMPLIFIEES

On peut aussi utiliser l'opérateur : **j = rotation π/2** (cf § 5.1) et choisir l'axe des « x » comme référence. Dans ce cas on écrira :

$$\vec{u} = \vec{x_u} + j\,\vec{y_u}$$

$$\vec{v} = \vec{x_v} + j\,\vec{y_v}$$

avec :

$$\vec{x}\,.\,\vec{x} = x^2 \;;\; j\vec{y}\,.\,j\vec{y} = y^2$$

produits scaclaire de vecteurs colinéaires

$$\vec{x}\,.\,j\vec{y} = j\vec{y}\,.\,\vec{x} = 0$$

produits scaclaire de vecteurs orthogonaux

On retrouve bien par cette méthode

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$$

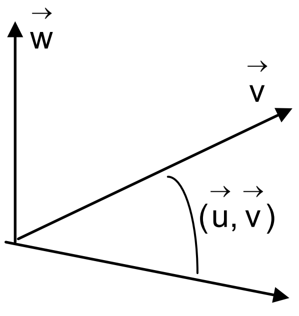
Il faudra cependant prendre garde à ne pas confondre produit scalaire de deux vecteurs et produit de deux nombres complexes, qui ne sont pas de même nature..

ISBN : 978-2-9544675-1-1

9 PRODUIT VECTORIEL DE DEUX VECTEURS

9.1 DEFINITION DE BASE

Par analogie avec la définition du produit scalaire, nous définirons géométriquement le produit vectoriel de deux vecteurs de la manière suivante :

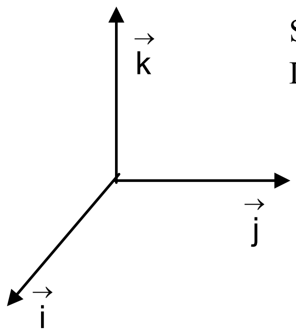


Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un vecteur $\vec{w}$ tel que :

- $\vec{w}$ est orthogonal au plan formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,
- le trièdre formé par les vecteurs $\vec{u}$ $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est de sens direct

$$\boxed{\| \vec{w} \| = \| \vec{u} \| * \| \vec{v} \| * \sin(\vec{u}, \vec{v})}$$

9.2 APPLICATION A UN REPERE ORTHONORME



Soient $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ les vecteurs directeurs d'un espace orthonormé. D'après ce qui précède on peut écrire :

$$\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = \| \vec{k} \| = 1$$

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \;,\; \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \;\; \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}, \;\; \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}, \;\;\; \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$$

9.3 EXPRESSION ANALYTIQUE

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques du plan $(\vec{i}, \vec{j})$ on peut écrire :

$$\vec{u} = \vec{i}\, x_u + \vec{j}\, y_u$$

$$\vec{v} = \vec{i}\, x_v + \vec{j}\, y_v$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (\vec{i}\, x_u + \vec{j}\, y_u) \wedge (\vec{i}\, x_v + \vec{j}\, y_v)$$

Soit en appliquant les résultats précédents :

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{k}\,(x_u y_v - y_u x_v)}$$

Ce qui est également choisi comme définition du produit vectoriel dans un espace orthonormé.

ISBN : 978-2-9544675-1-1