CHAPITRE 9

FILTRAGE EN PRESENCE DE BRUIT
ÉQUATION DU RADAR

ISBN : 978-2-9544675-1-1

1 ASPECT ALEATOIRE DU BRUIT

Nous avons étudié au chapitre 6 l'aspect physique du bruit, ce qui a permis de le qualifier en moyenne par sa puissance ou sa densité spectrale.

L'hypothèse de départ admise pour cette étude était celle d'un bruit : somme d'une multitude de tensions irrégulières dont les amplitudes et les phases sont distribuées suivant les lois du hasard.

Il en résulte que l'amplitude et la phase d'un bruit ne suivent pas une variation déterminée au cours du temps, mais au contraire, se modifient d'une manière imprévisible.

Il est pourtant pratique et indispensable, pour poursuivre l'étude du bruit, de lui attribuer une formulation explicite. C'est ce que nous allons faire, en adoptant pour **un bruit moyenne fréquence**, l'expression suivante, courante pour définir des signaux sous porteuse :

$$\boxed{n(t) = \rho(t)\cos\big(2\pi ft + \varphi(t)\big)}$$

où :

- f est la fréquence centrale du spectre considéré, ou fréquence porteuse du bruit moyenne fréquence.
- $\rho(t)$ et $\varphi(t)$ caractérisent l'évolution temporelle du bruit.

Dans le cas de signaux déterministes, $\rho(t)$ et $\varphi(t)$ prennent des valeurs directement liées au déroulement dans le temps du signal, ce sont donc des fonctions connues du temps.

Dans le cas du bruit, $\rho(t)$ et $\varphi(t)$ sont la conséquence de la sommation à un instant donné d'un très grand nombre de signaux élémentaires sans liaison entre eux, et de déroulement au cours du temps inconnu a priori.

$\rho(t)$ et $\varphi(t)$ peuvent donc prendre, à un instant donné, les valeurs quelconques dépendant uniquement de l'échantillon analysé.

Nous traduirons cette propriété en disant que :

$\rho(t)$ et $\varphi(t)$ sont des fonctions aléatoires du temps

On ne saura donc calculer des valeurs précises de $\rho(t)$ et $\varphi(t)$ à un instant donné, mais on peut tenter de préciser la tendance de leur variation en estimant la probabilité avec laquelle ces deux fonctions peuvent prendre certaines valeurs.

Le problème posé est alors celui de l'analyse statistique du bruit, dans le but de définir sa « *répartition* » en amplitude et en phase.

Ce problème lui-même serait impossible à résoudre si l'on ne pouvait attribuer au bruit une qualité supplémentaire : **la stationnarité**.

Un signal aléatoire stationnaire est un signal distribué suivant les lois du hasard, mais suivant des lois qui ne varient pas dans le temps.

Cette propriété est nécessaire à l'analyse statistique d'un signal aléatoire, car les « *lois de répartition* » résultant de l'observation d'un certain échantillon n'auraient aucune valeur si elles ne pouvaient être appliquées au déroulement futur du signal.

ISBN : 978-2-9544675-1-1

Le bruit répond, en pratique, à ce critère de stationnarité, pendant un temps suffisamment grand devant la durée de l'observation du radar.

Nous verrons, dans le chapitre suivant, que l'on sait trouver des « *lois de répartition* » donnant une bonne approche mathématique du comportement aléatoire du bruit.

Au titre de ce chapitre, nous allons particulièrement nous intéresser à la notion de puissance et de filtrage du bruit, ce qui amènera la définition du filtrage optimal et nous permettra d'écrire l'équation du radar.

2 PUISSANCE MOYENNE D'UN BRUIT – EFFET DU FILTRAGE

2.1 RETOUR SUR LA NOTION DE DENSITE SPECTRALE

Un des paramètres du bruit directement accessible à la mesure est, comme nous l'avons vu au chapitre 6, sa densité spectrale b, *(en Watt/hertz)* qui est la puissance émise, dans une bande de fréquence unitaire, par une source de bruit.

Dans l'hypothèse où **la puissance émise par une source de bruit est uniformément répartie dans le domaine des fréquences,** nous avions écrit :

$$\boxed{B = k \cdot T_B \cdot \Delta f}$$

expression où :

- B : puissance moyenne du bruit
- k : constante de *Boltzman*
- T_B : température de bruit du radar
- Δf : bande d'observation

et :

$$\boxed{b = \frac{B}{\Delta f}}$$

densité spectrale du bruit.

En pratique, la densité spectrale de bruit peut être une fonction de la fréquence : $b(f)$ et nous définirons donc, pour **un bruit de répartition quelconque dans le domaine des fréquences :**

$$\boxed{b(f) = \lim_{\Delta f \to 0} \left\{ \frac{B(f, \Delta f)}{\Delta f} \right\}}$$

$B(f, \Delta f)$ est alors la puissance de bruit mesurée dans une bande Δf autour de la fréquence f.

Par ailleurs, nous avons montré au chapitre précédent, que la puissance moyenne d'un signal est égale à la somme des puissances moyennes portées par ses composantes.

Ce qui permettra d'écrire :

- la puissance moyenne d'un bruit dans une bande très faible « df » autour de la fréquence f, ou puissance portée par la composante du bruit à la fréquence f :

  $$d\big(B(f)\big) = b(f)df$$

- la puissance totale du même bruit, dans tout le domaine des fréquences, somme des puissances portées par chaque composante :

ISBN : 978-2-9544675-1-1

$$B = \int_{0}^{\infty} d\big(B(f)\big)$$

soit :

$$\boxed{B = \int_{0}^{\infty} b(f)df}$$

Cette relation est en accord avec les hypothèses du chapitre 6, car en effet, si :

$$b(f) = ct^{e} = b$$

et :

$$\Delta F = \text{ bande d'observation du bruit}$$

on retrouve évidemment :

$$B = b\Delta F.$$

Les bruits répondant à la définition $b(f)=b=ct^{e}$ sont connus sous le nom de « bruits blancs ».

Nous considérerons que, les bruits qui pénètrent, ou sont engendrés dans un récepteur sont des bruits blancs, ce qui recouvre la majorité des cas (Voir le chapitre 19 § 3 pour la réception en présence de bruits colorés) et examinerons dans ce cas l'effet de filtrage du récepteur.

2.2 PASSAGE DANS UN FILTRE LINEAIRE

Le filtre linéaire agit sur chaque composante du bruit de la même manière qu'il agit sur un signal quelconque, c'est-à-dire en lui apportant (cf. chapitre 8) :

- une atténuation $\alpha(f) = \left|F(f)\right|$ (sur son amplitude) ;
- un déphasage $\varphi(f) = \mathrm{Arg}\left(F(f)\right)$

Le déphasage venant s'ajouter à la phase aléatoire $\varphi(t)$ de chaque composante du bruit, n'a finalement pas d'influence sur le comportement moyen du bruit.

L'atténuation, elle, vient jouer sur la puissance portée par chaque composante du bruit qui était avant filtrage :

$$d(B) = bdf$$

et deviendra après filtrage :

$$d\big(B(f)\big) = b(f)df = b\left|F(f)\right|^{2}df$$

car la puissance moyenne du bruit est proportionnelle au carré de son amplitude. La puissance moyenne de bruit après filtrage sera finalement :

$$\boxed{B_{(\text{filtré})} = b \cdot \int_{0}^{\infty} \left|F(f)\right|^{2} df}$$

Nous retiendrons également que cette notion simple du filtrage ne fait appel qu'aux fréquences positives, la notion de composantes et densité spectrale ayant été définie sur le spectre réel du bruit. On peut cependant remarquer que $|F(-f)| = |F(f)|$ et écrire l'expression précédente sous la forme :

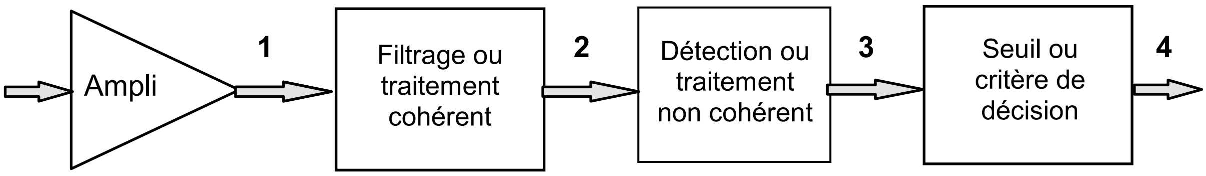
$$\boxed{B = \frac{b}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left|F(f)\right|^{2} \cdot df}$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

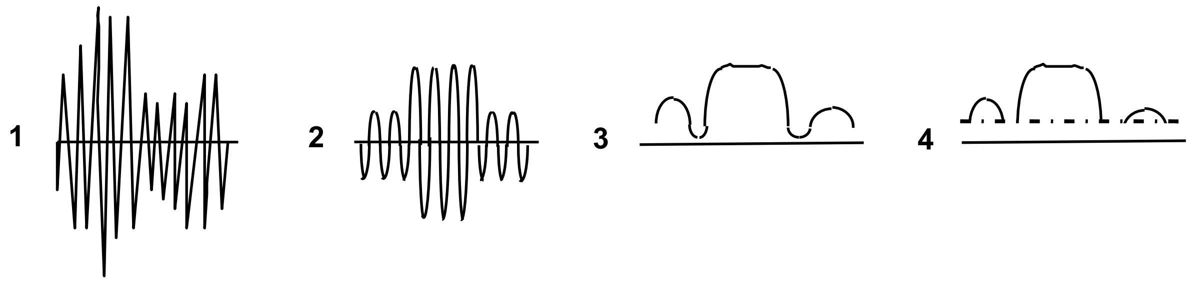
3 TRAITEMENT DU SIGNAL EN PRESENCE DE BRUIT

Le signal perçu et amplifié par un récepteur de radar est un signal composite formé de la superposition des échos utiles et d'un bruit non négligeable.

Le problème du radariste est donc de discerner le signal utile dans le bruit qui l'entoure. Pour cela, il faut rechercher le meilleur traitement qui peut, en général, se ramener au schéma type suivant :



Dans le cas du traitement le plus simple : *filtrage + détection + seuil*, l'allure du signal composite, (signal utile plus bruit) à l'issue des divers traitements est donnée ci après :



Le filtrage aura pour but « *d'atténuer* » au maximum le bruit tout en préservant le signal.

La détection a pour rôle de mettre le signal sous une forme compatible à la comparaison avec un seuil.

On convient, ensuite, de décider que le signal est un signal utile, c'est-à-dire un écho en provenance d'une cible placée dans le champ d'observation du radar, lorsque le signal filtré et détecté dépasse le seuil.

Généralement, on considère que **le détecteur est quadratique**, c'est-à-dire que le signal à la sortie du détecteur a pour expression :

$$\boxed{V(t) = k \cdot A^2(t)}$$

si le signal, à l'entrée du détecteur, est de la forme :

$$\boxed{s(t) = A(t) \cdot \cos(\omega t + \varphi)}$$

A la sortie du détecteur, on trouvera donc une tension vidéo fréquence, toujours positive, dont la valeur à chaque instant est proportionnelle à la puissance crête du signal détecté.

La comparaison au seuil se résume à la double condition :

- présence d'un écho si la puissance crête du signal est supérieure au seuil ;
- absence d'écho si la puissance crête du signal est inférieure au seuil.

Le signal détecté est composé : du seul bruit lorsque aucune cible n'a renvoyé d'écho, du signal utile superposé au bruit dans le cas contraire.

ISBN : 978-2-9544675-1-1

On peut donc, si le bruit est d'un niveau élevé, décréter une présence d'écho sur une pointe de bruit. Pour éviter ces faux échos, on s'efforcera « *d'aligner* » la position du seuil sur le bruit.

Par ailleurs, la sommation du bruit et du signal utile s'effectue sous porteuse, le résultat dépend donc de la phase relative du bruit à l'endroit de l'écho de cible.

Dans ces conditions, un écho en provenance d'une cible, ne sera pris en compte que si la somme vectorielle écho utile plus bruit, forme un signal d'amplitude suffisante pour dépasser le seuil après détection.

La prise en compte de l'écho utile sera donc d'autant plus probable que la puissance crête du signal correspondant sera grande devant la puissance crête du bruit qui l'accompagne.

En outre, si la puissance crête d'un bruit à un instant donné « t » n'est pas connue, on sait qu'elle est proportionnelle à « *loi de répartition donnée* » à sa puissance moyenne.

La qualité de la détection d'un radar (au sens large du terme), est donc essentiellement liée aux puissances relatives du signal utile et du bruit qui l'accompagne, après l'opération de filtrage du récepteur.

Elle sera d'autant meilleure que le rapport de ces puissances sera élevé, car si la puissance du signal est grande devant celle du bruit, on a la possibilité de placer le seuil :

- assez haut pour éliminer la quasi totalité du bruit,
- assez bas pour laisser passer le signal utile dans la majorité des cas.

La présence du détecteur provoque une variation des lois de répartition du bruit et du mélange signal bruit qui sera étudiée au chapitre 10.

Cette action étant non linéaire, on ne peut après détection parler de « caractéristiques spectrales » du signal et du bruit.

Nous verrons, plus loin, comment évaluer la qualité de la détection du radar, compte-tenu de l'effet du détecteur, en fonction du rapport des puissances du signal et du bruit à l'entrée de celui-ci, soit sous porteuse, après filtrage.

Nous allons donc écrire ce rapport sous la forme déjà employée au chapitre 6, soit :

$$\frac{S}{B} = \frac{\text{Puissance crête du signal moyenne fréquence après filtrage}}{\text{Puissance moyenne du bruit moyenne fréquence après filtrage}}$$

D'après ce qui précède, on aura intérêt à rechercher un rapport S/B le plus grand possible. Le récepteur idéal est donc, de ce point de vue, celui qui réalise l'optimisation la meilleure du rapport S/B.

4 FILTRE OPTIMAL – NOTION DE RENDEMENT

Le filtrage optimal sera celui qui permettra d'obtenir pour un signal donné, **le rapport signal sur bruit maximal.**

Le filtre agit dans le domaine des fréquences par atténuation et déphasage ; le problème est que son action permette d'atténuer le moins possible la puissance crête du signal et le plus possible la puissance moyenne du bruit, de telle manière que leur rapport passe par un maximum.

Rappelons les relations qui relient S et B aux spectres du signal et du bruit et à la transmitance du filtre : F(f).

ISBN : 978-2-9544675-1-1

a) Nous avons vu au paragraphe 2.2 que la puissance moyenne d'un bruit blanc de densité spectrale b, s'écrit après filtrage :

$$B = \frac{b}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)|^2 \cdot df$$

b) En ce qui concerne le signal en moyenne fréquence, nous savons que (cf. chapitre 8) :

$$P_c(t) = \frac{A^2(t)}{2} \qquad \text{et} \qquad A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) \cdot e^{j2\pi ft}\, df.$$

si $H(f)$ est le spectre généralisé du signal.

4.1 CONDITION DE PHASE

Après passage dans le filtre de transmitance $F(f)$, le spectre du signal devient :

$$H_s(f) = H(f) \cdot F(f)$$

et le signal filtré s'écrira donc :

$$A_s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) \cdot F(f) \cdot e^{j2\pi ft} df.$$

Ce signal passe par une amplitude maximale au temps $t = 0$, si le produit $H(f).F(f)$ est réel, car alors toutes les composantes du spectre sont en phase et s'ajoutent en amplitude. **Le filtre adapté au signal est celui qui rend son spectre réel positif.**

Ce qui implique la **condition de phase** à remplir par le filtre de transmitance $F(f)$:

$$\boxed{\mathrm{Arg}\,(F(f)) = -\mathrm{Arg}\,(H(f))}$$

Cette amplitude maximale se calcule alors par la relation :

$$A_{max} = A_s(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f) \cdot F(f)|\, df$$

Cette amplitude est la plus grande que peut prendre tout signal de spectre $H(f).F(f)$ car toute intégrale s'un nombre complexe est majorée par celle de son module.

et la puissance crête d'un signal s'écrit :

$$P_{c\,max} = S = \frac{A_{max}^2}{2}$$

D'où l'expression de la puissance crête du signal après filtrage :

$$S = \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f) \cdot F(f)| df \right]^2$$

4.2 CONDITION D'AMPLITUDE

L'opération précédente a consisté à ajuster au mieux le déphasage du filtre, de manière à extraire l'amplitude maximale du signal de spectre $H_s(f)$.

L'optimisation du filtrage n'est pas terminée pour autant ; en effet, le rapport signal sur bruit s'écrit :

ISBN : 978-2-9544675-1-1

$$\frac{S}{B}=\frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left|H(f)\cdot F(f)\right|\cdot df\right]^2}{b\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left|F(f)\right|^2\cdot df}$$

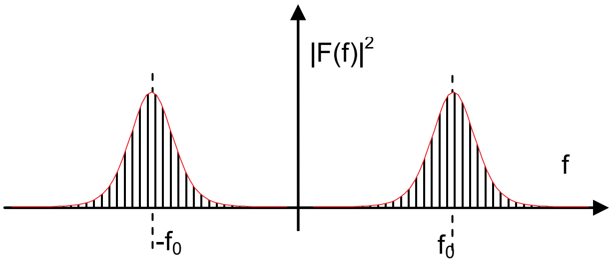
S/B est, à spectre H(f) donné, une fonction du module de la transmitance |F(f)| du filtre utilisé. Il reste donc à choisir l'atténuation de ce filtre en fonction de la fréquence.

La démonstration rigoureuse du choix de |F(f)|, qui fait appel à *l'inégalité de Schwartz,* est donnée en annexe. On peut également rechercher une explication simple du phénomène en se reportant aux observations suivantes :

a) La puissance moyenne du bruit ne dépend que de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\,F(f)\,\right|^2 df$$

qui est l'aire représentée sur la figure ci-après.



b) Une affinité de la courbe limite de la surface hachurée sur l'axe des puissances, $|F(f)|^2$,est équivalente à un changement du gain de la chaîne. Elle a le même effet sur le signal et sur le bruit et ne change rien à S/B.

c) A surface donnée, une variation de la forme de cette courbe n'agit que sur la forme et la puissance maximale du signal utile, mais n'agit pas sur la puissance moyenne du bruit.

d) Le filtre le meilleur pour un signal donné est celui qui « *suit* » le plus fidèlement possible l'amplitude de son spectre, en atténuant peu les parties fortes de ce spectre et davantage ses parties faibles, car il devient caractéristique de ce signal à l'exclusion de tout autre.

e) Le filtre adapté au signal répondra donc à la **condition d'amplitude** :

$$\boxed{\left|F(f)\right|=\left|H(f)\right|}$$

f) Le **filtre optimal ou adapté** au signal devra répondre simultanément aux conditions d'amplitude et de phase :

$$\left|F(f)\right|=\left|H(f)\right|$$

et :

$$\mathrm{Arg}(F(f))=-\mathrm{Arg}\left|H(f)\right|$$

H(f) est donc la quantité conjuguée de F(f)., ce qui se résume par la relation :

$$\boxed{F(f) = H^*(f)}$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

Appliquons cette relation au calcul du rapport signal sur bruit après passage dans le filtre adapté :

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{max} = \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left|H(f)\cdot F(f)\right| \cdot df\right]^2}{b \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left|F(f)\right|^2 \cdot df} = \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left|H(f)\right|^2 \cdot df\right]^2}{b \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left|H(f)\right|^2 \cdot df}$$

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{max} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left|H(f)\right|^2 \cdot df}{b}$$

Or (cf. chapitre 8) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|H(f)\right|^2 \cdot df = E$$

est l'énergie du signal de spectre $H(f)$, ce qui permet d'écrire :

$$\boxed{\left(\frac{S}{B}\right)_{max} = \frac{E}{b}}$$

avec :

- S : puissance crête du signal **moyenne fréquence** après filtrage,
- B : puissance moyenne du bruit **moyenne fréquence** après filtrage,
- E : énergie du signal **moyenne fréquence** avant filtrage,
- b : densité spectrale du bruit **moyenne fréquence** avant filtrage,
- E/b : rapport signal sur bruit énergétique.

4.3 CONCLUSIONS

Le rapport S/B à la sortie du filtre moyenne fréquence du récepteur est le paramètre essentiel de la qualité de la détection d'un radar.

Au mieux, dans le cas du filtrage optimal ou adapté, S/B est égal au rapport signal sur bruit énergétique E/b à l'entrée du récepteur (soit au point de référence choisi au chapitre 6) :

$$\boxed{\left(\frac{S}{B}\right)_{max} = \frac{E}{b}}$$

et le filtre adapté répond à la condition :

$$\boxed{F(f) = H^*(f)}$$

Dans les **cas courants,** les filtres ne sont pas parfaitement adaptés, et on peut définir **un rendement de filtrage :**

$$\eta = \frac{S/B}{E/b}$$

En pratique, le rendement de filtrage est de l'ordre de 0,8 soit une perte de S/B par rapport au filtrage optimal de l'ordre de 1 dB.

ISBN : 978-2-9544675-1-1

5 EQUATION DU RADAR

5.1 CONDITIONS GENERALES DE DETECTION

Le chapitre 7 a amené la définition d'une probabilité de détection et d'une probabilité de fausse alarme (chapitre 7, § 7).

Dans le cas présent, nous pouvons préciser ces notions en nous reportant au traitement du signal défini au paragraphe 3, et écrire :

- la probabilité de détection P_d : qui est la probabilité pour que le signal composite (somme du signal utile et du bruit sous porteuse), dépasse le seuil ou remplisse le critère de décision.
- la probabilité de fausse alarme P_{fa} : qui est la probabilité pour que le bruit seul dépasse le seuil ou remplisse le critère de décision.

Le choix du seuil (ou du critère de décision) dépend de la nature du bruit après traitement et de la probabilité de fausse alarme choisie.

Dans ces conditions, la probabilité de détection dépend essentiellement de la valeur du rapport signal sur bruit S/B, obtenue après filtrage du signal composite par le récepteur du radar.

Nous établirons au chapitre 10, les relations qui relient P_d, P_{fa} et S/B pour divers cas de traitements du signal et de comportements de l'écho utile.

En attendant, nous retiendrons que tout choix de P_d et P_{fa} entraîne, compte tenu du traitement adopté, le choix d'une valeur bien déterminée de S/B.

Connaissant le rendement η du filtrage réalisé en moyenne fréquence, on peut donc calculer le rapport signal sur bruit énergétique à imposer au radar, au point de référence choisi au chapitre 6, pour caractériser le bruit et le signal :

$$\frac{E}{b} = \frac{S}{B} \cdot \frac{1}{\eta}$$

Par ailleurs, l'effet de rendement de filtrage peut être assimilé à une perte sur le signal le long de son trajet dans le récepteur (par rapport à un récepteur idéal).

En pratique, nous poserons donc :

$$\frac{E}{b} = \frac{S}{B}$$

comme dans un récepteur idéal, et reporterons le coefficient $1/\eta$ dans le décompte des pertes L subies par le signal.

La connaissance de l'équation de propagation et de la nature du bruit accompagnant le signal utile, permet alors d'aboutir à l'équation du radar.

5.2 DETECTION D'UNE CIBLE SILENCIEUSE

Si la cible observée par le radar n'émet aucun signal parasite, et si le radar n'est soumis à aucun brouillage artificiel, le bruit qui accompagne le signal a pour densité spectrale (cf. chapitre 6) :

$$b_0 = F \cdot k \cdot T_0$$

L'équation de propagation établie au chapitre 7 nous permet d'écrire l'expression de l'énergie perçue par le radar :

ISBN : 978-2-9544675-1-1

$$E_r = \frac{P_c \cdot \tau \cdot G^2 \cdot \lambda^2 \cdot \sigma}{(4\pi)^3 \cdot D^4 \cdot L}$$

Les conditions de détection imposent la valeur du rapport signal sur bruit énergétique à obtenir, soit :

$$\frac{E_r}{b_0} = \left(\frac{E}{b}\right) = \frac{S}{B}$$

d'où l'équation du radar sur cible silencieuse :

$$\boxed{\left(\frac{S}{B}\right) = \frac{P_c \cdot \tau \cdot G^2 \cdot \lambda^2 \cdot \sigma}{(4\pi)^3 \cdot D^4 \cdot F \cdot kT_0 \cdot L}}$$

Expression où :

- G : gain de l'aérien du radar
- λ : longueur d'onde utilisée
- σ : surface équivalente de la cible
- P_c : puissance crête émise
- τ : durée de l'impulsion émise (ou analysée)
- (S/B) : rapport signal sur bruit imposé au radar
- F : facteur de bruit du radar
- k : ct° de Boltzman
- T_0 : température de référence normalisée = 290°K
- D : distance cible radar
- L : pertes sur le signal utile

Le coefficient de pertes L tient compte :

- des pertes à l'émission entre la sortie de l'émetteur et le point de mesure du gain de l'aérien ;
- des pertes à la réception entre le point de mesure du gain de l'aérien et le point de référence ;
- des pertes subies par l'onde dans son trajet aller et retour ou pertes atmosphériques ;
- des pertes dues au traitement du signal (filtrage, circuits spéciaux) et à l'exploitation de l'information ;
- des dites pertes de modulation de lobe dues au mouvement de l'aérien et à la forme de son faisceau ;
- etc.

Son estimation sera reprise au chapitre 11.

Le coefficient kT_0 est pris égal à –203,8 dB.

L'équation précédente peut prendre diverses formes, suivant le paramètre recherché.

ISBN : 978-2-9544675-1-1

Par exemple :

$$D^4 = \frac{G^2 \cdot \lambda^2 \cdot \sigma \cdot P_c \cdot \tau}{(4\pi)^3 \cdot (S/B) \cdot F \cdot kT_0 \cdot L}$$

ou :

$$E_e = P_c \cdot \tau = \frac{(S/B) \cdot (4\pi)^3 \cdot D^4 \cdot F \cdot kT_0 \cdot L}{G^2 \cdot \lambda^2 \cdot \sigma}$$

Le calcul pourra être effectué par la méthode des « *décibels par rapport à l'unité* » exposée au chapitre 7.

5.3 DETECTION D'UNE CIBLE BROUILLEUSE

Dans certains cas, la cible observée par le radar, peut être porteuse d'un brouilleur émettant du bruit dans la bande du radar.

Nous appellerons b_B la densité spectrale de bruit émise par le brouilleur, G_B le gain de l'antenne du brouilleur dans la direction du radar.

La densité spectrale de bruit en provenance du brouilleur pénétrant dans le radar, sera alors :

$$b_1 = \frac{b_{B.}G_B}{4\pi D^2} . \frac{G.\lambda^2}{4\pi} . \frac{1}{l}$$

et le bruit total accompagnant le signal utile :

$$b = b_0 + b_1 = k.T_0.F + b_1$$

Généralement, b_1 est très grand devant b_0 (sinon le brouilleur ne serait pas très efficace), ce qui permet de poser :

$$b \sim b_1 = \frac{b_{B.}G_B}{4\pi D^2} . \frac{G.\lambda^2}{4\pi} . \frac{1}{l}$$

et (équation de propagation) :

$$E_r = \frac{P_c \cdot \tau \cdot G^2 \cdot \lambda^2 \cdot \sigma}{(4\pi)^3 \cdot D^4 \cdot L}$$

D'où l'équation du radar sur une cible brouilleuse :

$$\boxed{\left(\frac{S}{B}\right) = \frac{P_c \cdot \tau \cdot G \cdot \sigma}{(4\pi) \cdot D^2 \cdot L'} \cdot \frac{1}{b_B \cdot G_B}}$$

Expression où :

- G : gain de l'aérien du radar
- σ : surface équivalente de la cible
- Pc : puissance crête émise
- τ : durée de l'impulsion émise (ou analysée)
- (S/B) : rapport signal sur bruit imposé au radar
- b_B : densité spectrale du bruit émis par le brouilleur
- G_B : gain du brouilleur dans la direction du radar

ISBN : 978-2-9544675-1-1

- D : distance cible radar
- $L' = L_{dB} - l_{dB'}$

L'_{dB}, est la perte calculée en 5.2 moins les pertes communes sur le bruit et le signal le long de leur trajet commun, soit :

- les pertes atmosphériques retour ;
- la moitié des pertes de modulation de lobe ;
- les pertes hyperfréquence à la réception entre le point de mesure du gain et le point de référence.

Par ailleurs, il faut remarquer que, compte tenu de leur trajet commun, le bruit du brouilleur et le signal utile sont vus par le radar sous le même gain d'antenne.

Le gain de l'aérien du radar à la réception ne modifie donc pas le rapport signal sur bruit dans le cas de la détection d'une cible brouilleuse.

5.4 DETECTION D'UNE CIBLE DANS UN MILIEU BROUILLEUR

Le radar peut également fonctionner en présence de plusieurs cibles brouilleuses dispersées dans son domaine d'observation.

Si nous appelons :

- D_i : distance brouilleur radar
- b_i : la densité spectrale de bruit émise par chaque brouilleur
- G_i : le gain de chaque brouilleur dans la direction du radar
- g_{ri} : le gain à la réception dans la direction de chaque brouilleur
- l_i : les pertes atmosphériques retour et hyper réception
- G_e : son gain à l'émission
- G_r : son gain maximum à la réception

Nous pouvons écrire, en retenant que b_0 n'est pas toujours négligeable ici :

$$b = \sum b_1 + b_0 = \sum \frac{b_i G_i}{4\pi D_i^2} \frac{g_{ri}\lambda^2}{4\pi} \frac{1}{l_i} + kT_0 F$$

Si α_i est le taux de lobes secondaires de l'antenne radar, on peut écrire :

$$g_{ri} = \alpha_i G$$

$$b = \sum \frac{b_i G_i \lambda^2}{(4\pi)^2 . l_i} \frac{\alpha_i G}{D_i^2} + kT_0 F$$

et comme :

$$E_r = \frac{P_c \tau\, G^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3\, D^4 L}$$

$$\boxed{\frac{S}{B} = \frac{P_c \tau\, G^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3\, D^4 L} \left(\sum \frac{b_i G_i \lambda^2}{(4\pi)^2 . l_i} \frac{\alpha_i G}{D_i^2} + kT_0 F \right)^{-1}}$$

équation du radar dans un milieu brouilleur.

ISBN : 978-2-9544675-1-1

REMARQUES :

Le rapport (S/B) dépend de la répartition spatiale des brouilleurs. Différentes méthodes qui sortent du cadre de ce chapitre ont été proposées pour établir des modèles de situations permettant le calcul d'une valeur moyenne du terme :

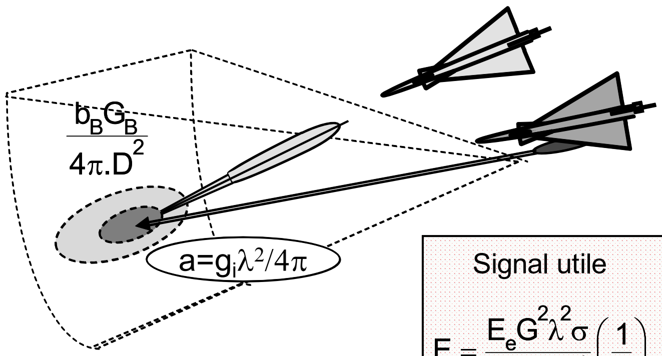
$$\sum \frac{b_i \cdot G_i \cdot \lambda^2}{(4\pi)^2 l_i D_i^2} \cdot \alpha_i \, G_r$$

La décomposition du gain du radar en gain à l'émission : G_e et gain à la réception G_r peut être appliquée, si besoin est, aux cas étudiés en 5.2 et 5.3.

La précédente relation contient l'équation établie en 5.3 ; en effet, pour une seule cible placée dans le lobe principal, $b_0 << b_1$ et :

$$\alpha_i = 1 \qquad \lambda_i = \lambda \quad \text{et} \quad D_i = D$$

On peut aussi en donner une version simplifiée si tous de Di sont voisins de D :



Brouilleur : puissance W_B, bande ΔF, gain G_B

-densité spectrale émise :

$b_B = W_B / \Delta F$

-gain de l'antenne radar dans la direction du brouilleur

$g_i = \alpha_i G$

- distance du brouilleur ~ égale à celle de la cible

$$b_i = \left(\frac{b_B G_B}{4\pi . D^2}\right)\left(\frac{g_i \lambda^2}{4\pi}\right)\left(\frac{1}{l'}\right)$$

Signal utile

$$E = \frac{E_e G^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 . D^4}\left(\frac{1}{L}\right)$$

Rapport signal sur brouillage

$$\frac{S}{B} = \left(\frac{E_e G.\sigma}{4\pi . D^2 . L'}\right)\left(\frac{1}{\sum \alpha_i b_B G_B}\right)$$

$$D^2 = \frac{P_c . \tau . G . \sigma}{4\pi . (S/B)_e L'} * \frac{1}{\sum \alpha_i . b_B . G_B}$$

EQUATION DU RADAR EN MILIEU BROUILLEUR SYNTHESE

6 DISCUSSION DE L'EQUATION DU RADAR

La portée du radar dépend dans tous les cas des paramètres $P_c.\tau$, σ et L.

On peut donc dire qu'**en général** :

- – **la portée du radar** croît avec $P_c.\tau$ qui représente l'énergie émise à chaque impulsion par le radar, donc **croît avec la puissance moyenne du radar et non avec sa puissance crête ;**
- – la portée du radar croît avec la surface équivalente de la cible ;
- – la portée du radar est fortement liée aux pertes L subies par le signal.

Pour évaluer l'influence des autres paramètres, il convient de considérer les cas suivants :

ISBN : 978-2-9544675-1-1

6.1 CIBLE SILENCIEUSE – UN ECHO

Dans ce cas deux autres termes apparaissent (e : émission ; r : réception) :

$$\frac{G^2\lambda^2}{4\pi} = \frac{G_e G_r \lambda^2}{4\pi} = G_e A_r$$

et le facteur de bruit F qui doit être minimisé.

On peut donc dire que la portée croît avec le gain à l'émission et la surface effective à la réception des aériens.

Mais, pour un aérien unique, G, A et λ^2 sont liés.

Nous retiendrons que :

- à surface d'aérien donnée, la portée croît comme $\sqrt{1/\lambda}$;
- à gain d'aérien donné, la portée croît comme $\sqrt{\lambda}$.

Il faut se garder de généraliser l'influence de λ car les paramètres : σ, F, L, et même P_c sont des fonctions de la longueur d'onde utilisée.

Des problèmes pratiques liés :

- à la taille et au prix de l'aérien,
- aux puissances disponibles,
- aux pertes rencontrées,
- au facteur de bruit réalisable,
- aux modes d'exploration de l'espace,
- etc.

déterminent, en fait, le choix de la longueur d'onde dans chaque cas particulier.

Nous retiendrons que les radars de très grande portée, fonctionnent sur des longueurs d'onde de 5 cm à 1 m.

6.2 CIBLE SILENCIEUSE – INTEGRATION COHERENTE DU SIGNAL REÇU PENDANT UN TEMPS « T »

Nous considérons dans ce cas que le filtre adapté est capable de prendre en compte non pas un seul écho, mais tous les échos perçus pendant un temps T, soit une énergie totale E_c. Il suffit pour cela que T reste inférieur au « temps de cohérence » de la cible analysée, (0,01 à 0,1 sec selon les cas) c'est-à-dire au temps pendant lequel les évolutions de la cible ne viennent pas perturber la cohérence du signal.

Nous supposerons en outre que les aériens d'émission et de réception sont physiquement séparés quoique relativement voisins. Dans ces conditions l'équation du radar s'écrira :

$$D^4 = \frac{E_e G_e G_r \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 F \cdot k T_0 \cdot S/B \cdot L}$$

avec : $E_e = P_m T$, P_m = Puissance Moyenne, T durée de la mesure

$$G_e = \frac{4\pi}{\text{angle solide émission}} \times \text{facteur de gain}$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

soit avec $f = 0{,}5$, Ω_e ouverture antenne à l'émission

$$G = \frac{2\pi}{\Omega_e}$$

par ailleurs, si T_u est le temps imposé entre deux mesures dans une direction donnée, 2π l'angle solide global à observer (toutes directions au-dessus du site zéro) :

$$T_u = \frac{2\pi}{\Omega_e} \cdot T$$

Ce qui amène :

$$T = \frac{T_u}{G_e} \quad \text{et} \quad E_e = \frac{P_m T_u}{G_e}$$

d'où une nouvelle forme de l'équation du radar :

$$\boxed{D^4 \cong \frac{P_m T_u G_r \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 F \cdot kT_0 \cdot S/B \cdot L}}$$

On voit donc que tant que **T reste inférieur au temps de cohérence de la cible** T_c, ce qui impose la condition :

$$G_e \geq \frac{T_u}{T_c}$$

seul le gain de l'antenne à la réception a une influence sur la portée du radar.

Cependant, pour permettre cette performance, si Ω_r est l'ouverture de l'antenne à la réception, il faudra pouvoir disposer de :

$$N = \frac{\Omega_e}{\Omega_r}$$

voies réceptions simultanées, ce qui peut être obtenu de différentes manières, dont la formation des voies par le calcul (cf. chapitre 5).

6.3 CIBLE BROUILLEUSE – UN ECHO

Dans le cas de cibles brouilleuses, λ et le gain à la réception disparaissent de l'équation du radar.

Seul, le gain à l'émission G_e et le rapport de lobes secondaires α_i influent sur la portée du radar.

Par ailleurs, afin que peu de cibles brouilleuses ne puissent être interceptées simultanément par le lobe principal du radar ($\alpha_i = 1$), on aura intérêt à utiliser des lobes étroits.

En résumé, dans ce cas de fonctionnement, un radar devra posséder :

- une puissance moyenne élevée ;
- des lobes secondaires faibles ;
- un lobe principal étroit ;
- un gain à l'émission important.

Ces deux derniers facteurs amènent l'utilisation de longueurs d'ondes faibles, dans la mesure où des puissances importantes sont disponibles. En outre, l'emploi de fréquences aléatoires peut permettre d'élargir la bande d'émission du radar, ce qui, à puissance de brouilleur donnée,

ISBN : 978-2-9544675-1-1

provoquera une diminution de la densité spectrale émise, le brouilleur étant alors amené à étaler sa puissance sur une large bande.

6.4 CIBLE BROUILLEUSE – INTEGRATION COHERENTE

Dans le **cas d'un seul brouilleur** dans le lobe principal de l'antenne réception, l'équation du radar s'écrit (cf. 5.3) :

$$D^2 = \frac{E_e G_e \sigma}{4\pi \cdot S/B \cdot L'} \cdot \frac{1}{b_B G_B}$$

En nous plaçant dans les mêmes conditions qu'au paragraphe 6.2 et en particulier à fréquence fixe (au moins par séquences), pour préserver la cohérence des cibles, cette équation se réduit à :

$$\boxed{D^2 \cong \frac{P_m T_u \cdot \sigma}{4\pi \cdot S/B \cdot L'} \cdot \frac{1}{b_B G_B}}$$

on arrive alors au paradoxe que ni le gain à l'émission, ni le gain à la réception n'influent sur la portée du radar.

Dans le **cas de Q brouilleurs,** répartis dans l'espace total d'angle solide 2π, le nombre moyen de brouilleurs vus par le radar (indépendamment des problèmes de lobes secondaires cités en 6.3) sera :

$$n \cong \frac{\Omega_r}{2\pi} \cdot Q$$

car il peut y avoir 2π/Ωr directions de réception indépendantes.

On écrira alors :

$$D^2 \approx \frac{P_m T_u \cdot \sigma}{4\pi \cdot S/B \cdot L'} \cdot \frac{2\pi}{\Omega_r \cdot Q \cdot b_B G_B} = \frac{P_m T_u \cdot \sigma}{4\pi \cdot S/B \cdot L'} \cdot \frac{G_r}{Q \cdot b_B G_B}$$

On note alors que **les performances du radar sont d'autant meilleures que la directivité de l'antenne de réception est élevée**, ce qui avait déjà été évoqué en 6.3.

Cette remarque s'applique dans tous les cas de brouillages multiples, où l'amélioration de la directivité doit s'accompagner d'une réduction des lobes secondaires dont la contribution est négligée dans le raisonnement simplifié qui précède. Des compromis devront être recherchés et pourraient être trouvés en utilisant de grandes antennes à la réception uniquement.

7 CONCLUSION

Ce qui précède n'est qu'une discussion très générale, qui met en évidence diverses formes possibles de l'équation du radar. On note en particulier que tout ou partie du gain à l'émission peut être échangé contre de l'intégration cohérente, et que les performances de gain ou de directivité de l'antenne de réception sont largement à prendre en compte.

Le choix des caractéristiques d'un radar reste cependant une affaire de compromis en fonction de tous les problèmes pratiques posés lors de l'élaboration des projets. Par exemple des performances de précision angulaire, cadence d'information, mesure de vitesse, vision dans les échos fixes, etc… peuvent venir influer dans le choix des caractéristiques du radar.

ISBN : 978-2-9544675-1-1

8 ANNEXE : INEGALITE DE SCHWARTZ APPLICATION AU FILTRAGE ADAPTE

8.1 INEGALITE DE SCHWARTZ

Soient :

- f(x) et g(x) deux fonctions complexes de la variable x ;
- $\lambda = \rho\, e^{j\theta}$ un nombre complexe.

Le nombre :

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f - \lambda \cdot g \right|^2 \cdot dx$$

est un nombre positif.

Nous écrirons :

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} (f - \lambda \cdot g)(f^* - \lambda^* \cdot g^*) \cdot dx$$

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 dx + |\lambda|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |g|^2 dx - \lambda^* \int_{-\infty}^{+\infty} f \cdot g^* \cdot dx - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f^* \cdot g \cdot dx$$

Plaçons-nous dans le cas où tous les termes de l'expression sont réels, ce qui impose :

$$\mathrm{Arg}(\lambda) = -\mathrm{Arg}\left(\int f^* \cdot g \cdot dx\right) = \mathrm{Arg}\left(\int f \cdot g^* \cdot dx\right)$$

il vient :

$$K = \rho^2 \int |g|^2 dx - 2\rho \left| \int f \cdot g^* dx \right| + \int |f|^2 dx$$

Le polynôme du second degré en ρ est positif quel que soit ρ si ses racines sont imaginaires ce qui impose que son déterminant soit négatif d'où :

$$\Delta = \left| \int f \cdot g^* \cdot dx \right|^2 - \int |g|^2 dx \cdot \int |f|^2 dx \leq 0$$

La condition particulière $K = 0$ correspond à l'apparition d'une racine double pour laquelle $\Delta = 0$; dans ce cas, la condition à réaliser se déduit immédiatement de la première expression de K et s'écrit :

$$\left| f - \lambda \cdot g \right| = 0$$

D'où le résultat :

Inégalité de Schwartz :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f \cdot g^* \cdot dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 \cdot dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |g|^2 \cdot dx$$

condition d'égalité :

$$f = \lambda g$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

8.2 APPLICATION AU FILTRAGE ADAPTE

Nous avons vu au paragraphe 4 qu'à *l'instant zéro,* on peut écrire :

$$A_s(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) \cdot F(f) \cdot df$$

et :

$$B = \frac{b}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)|^2 \cdot df$$

ce qui permet d'aboutir à l'expression :

$$\frac{S}{B} = \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f) \cdot F(f)| \cdot df \right]^2}{b \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)|^2 \cdot df}$$

soit en remarquant que l'énergie du signal s'écrit :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |\, H(f) \,|^2 \, df$$

$$\frac{S}{B} = \frac{E}{b} \cdot \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f) \cdot F(f)| \cdot df \right]^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 \cdot df \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)|^2 \cdot df} = \eta \cdot \frac{E}{b}$$

D'après *l'inégalité de Schwartz,* le coefficient multiplicateur η ne peut être qu'inférieur ou égal à l'unité.

La condition pour que η soit strictement égal à l'unité étant :

$$H(f) = \lambda F^*(f)$$

soit : transmitance du filtre, quantité conjuguée, à un coefficient près, du spectre du signal.

****

ISBN : 978-2-9544675-1-1