CHAPITRE 10

ASPECT PROBABILISTE DU TRAITEMENT DU SIGNAL

Rédigé avec l'aide de Monsieur André BERGES

1er partie : Données théoriques. Application au signal radar

ISBN : 978-2-9544675-1-1

1 INTRODUCTION – POSITION DU PROBLEME

Dans ce qui précède, nous avons examiné les conditions que doit remplir un récepteur pour aboutir en moyenne fréquence au meilleur rapport S/B.

Nous avons également vu que le signal composite ainsi formé était un signal aléatoire, et que l'on ne peut prédire à coup sûr :

- qu'en absence de cible le bruit ne crée pas un faux signal,
- qu'en présence de cible le signal composite écho plus bruit soit identifié comme contenant un signal utile.

Ceci nous avait amené à définir une probabilité de détection P_d, et une probabilité de fausse alarme P_{fa}.

Dans ce qui suit nous allons tenter de définir les relations qui relient S/B à P_d et P_{fa}, au niveau de l'écho élémentaire tout d'abord, puis au niveau du groupement d'échos ou plot. Ceci nous amènera à définir les lois de probabilités qui régissent le bruit et le signal, après avoir rappelé quelques notions de probabilités.

PREMIERE PARTIE
NOTIONS DE PROBABILITES

2 DEFINITIONS DE LA PROBABILITE

La notion de probabilité est née de l'étude des jeux de hasard. Elle a longtemps été définie à travers une tentative d'évaluation des chances de voir se réaliser un événement favorable parmi plusieurs cas possibles.

Nous introduirons cette notion en étudiant un jeu particulièrement simple : le jeu de pile ou face.

2.1 PREMIERE DEFINITION

Considérons une pièce de monnaie « *non truquée* » ; si on lance cette pièce, on se trouve en général devant deux possibilités :

- la pièce retombe sur « *pile* »,
- la pièce retombe sur « *face* ».

Intuitivement, on dit que la pièce a une chance sur deux de sortir « *pile* » et une chance sur deux de sortir « *face* ».

L'opération effectuée pour arriver au résultat précédent a été un dénombrement des cas possibles et des cas favorables de l'événement examiné a priori. Ceci amène à la première définition des probabilités :

La probabilité d'apparition d'un événement est le rapport du nombre de cas favorables à cette apparition au nombre de cas possibles. Appliquons cette règle à quelques exemples :

- la probabilité de tirer un roi d'un jeu de 52 cartes est : *4/52 = 1/13*
- la probabilité de sortir un six en jouant aux dés est : *1/6*
- la probabilité d'extraire d'une urne une boule rouge si cette urne contient 100 boules rouges et 200 vertes est : *1/3*.

ISBN : 978-2-9544675-1-1

Dans les cas pratiques le décompte des cas possibles et favorables est plus difficile. On sera souvent amené à utiliser les notions d'analyse combinatoire suivantes :

a - Arrangement :

Manière de prendre k éléments parmi n, deux suites contenant les mêmes éléments dans un ordre différent étant considérées comme distinctes :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

b - Permutation :

Manière de ranger les n termes d'une suite :

$$P_n = A_n^n = n!$$

c - Combinaison :

Manière de prendre k éléments parmi n, l'ordre étant indifférent :

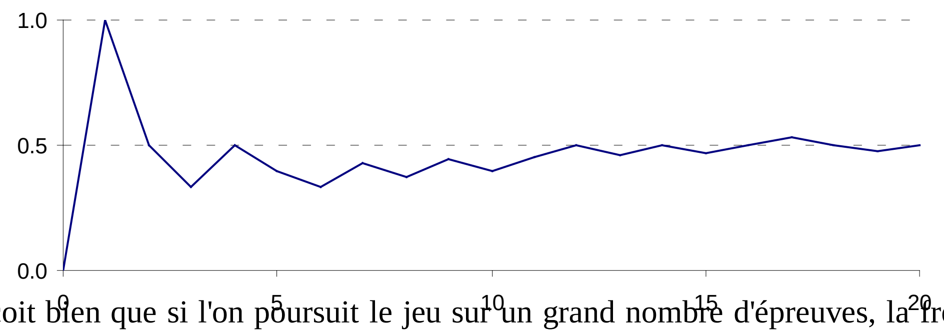
$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2.2 DEUXIEME DEFINITION

Reprenons le jeu de pile ou face et faisons un test sur n parties. Au bout de n parties nous aurons k fois pile et $n-k$ fois face.

$f = \frac{k}{n}$ s'appelle la fréquence de pile sur n parties.

Traçons la valeur de f en fonction de n sur une série d'épreuves.



On conçoit bien que si l'on poursuit le jeu sur un grand nombre d'épreuves, la fréquence f se rapproche de plus en plus de 1/2.

Autrement dit, la fréquence « f » tend vers la probabilité d'apparition de l'événement « p », lorsque le nombre d'épreuves tend vers l'infini

$$(f-p) \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty$$

Ceci amène à une deuxième définition de la probabilité :

La probabilité d'un événement est le nombre vers lequel tend sa fréquence d'apparition lorsque le nombre d'épreuves augmente indéfiniment.

Cette définition permet d'évaluer la probabilité d'un événement de manière empirique en se basant sur la continuité des causes qui peuvent le provoquer. Les événements répondant à cette définition sont dits « **aléatoires stationnaires** ».

ISBN : 978-2-9544675-1-1

2.3 REGLES COMPLEMENTAIRES

- Un événement certain a une probabilité égale à un.
- Un événement impossible a une probabilité égale à zéro.
- Si un jeu se décompose en un certain nombre de cas incompatibles, la somme des probabilités de chacun des cas est 1.
- Si p est la probabilité d'un événement, la probabilité contraire est : $q = 1 - p$.

3 THEOREMES DE BASE

Le décompte pur et simple des cas possibles et favorables n'est pas toujours aisé. Aussi devons-nous acquérir certains « instruments de travail » qui, comme toujours en mathématiques, s'expriment sous la forme de théorèmes.

3.1 THEOREME DES PROBABILITES TOTALES

a - Événements incompatibles

Connaissant la probabilité d'apparitions de deux événements a et b : $P(a)$ et $P(b)$, cherchons la probabilité d'apparition d'un événement E qui se produit lorsque a ou b apparaissent :

$$P(E) = P(a \text{ ou } b)$$

Nous savons que :

$$P(a) = \frac{\text{nb de cas favorables à :"a"}}{\text{nb de cas possibles}}$$

$$P(b) = \frac{\text{nb de cas favorables à :"b"}}{\text{nb de cas possibles}}$$

Donc :

$$P(a) + P(b) = \frac{\text{nb de cas favorables à "a"} + \text{nb de cas favorables à "b"}}{\text{nb de cas possibles}}$$

a et b s'excluant mutuellement, le numérateur de la fraction représente bien sans répétition le nombre de cas favorables à E ; nous pouvons donc écrire :

$$P(a \text{ ou } b) = P(a) + P(b)$$

b - Cas d'événements non incompatibles

Nous ne pouvons plus conclure comme précédemment, car dans ce cas, le décompte contient des répétitions, a et b pouvant apparaître ensemble.

Décomposons le problème :

Soient n possibilités parmi lesquelles :

- le nombre d'apparitions de a est :

$$n(a) = n(a \text{ seul}) + n(a \text{ et } b)$$

- le nombre d'apparitions de b est :

$$n(b) = n(b \text{ seul}) + n(b \text{ et } a)$$

- le nombre d'apparitions de E est :

$$n(E) = n(a \text{ seul}) + n(b \text{ seul}) + n(a \text{ et } b)$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

- le nombre d'apparitions simultanées de a et de b est :

$$n(a \text{ et } b) = n(b \text{ et } a)$$

par ailleurs :

$$n(a) + n(b) = n(a \text{ seul}) + n(b \text{ seul}) + 2n(ab) = n(E) + n(ab)$$

de ce décompte on peut déduire, en écrivant :

$$P(k) = \frac{n(k)}{n}$$

$$P(a) + P(b) = P(a \text{ ou } b) + P(a \text{ et } b)$$

soit :

$$P(a \text{ ou } b) = P(a) + P(b) - P(a \text{ et } b)$$

Exemple :

Considérons une région où il y a en moyenne :

- 70 % de chances pour qu'il pleuve,
- 50 % de chances pour qu'il y ait du vent,
- 40 % de chances pour qu'il pleuve et vente.

L'application de la relation précédente donne :

$$P\,\{\text{il pleuve ou il vente}\} = 0,5 + 0,7 - 0,4 = 0,8$$

ce qui est différent de la somme des probabilités séparées qu'il pleuve ou vente (soit 120 %, ce qui est impossible) mais suffisant pour aller passer ses vacances ailleurs ! On peut retrouver ce résultat en dressant le tableau suivant :

	pluie et vent				**pluie seule**			**Vent seul**		
nb de cas	1	2	2	4	5	6	7	8	9	10
où il pleut	x	x	x	x	x	x	x			
où il vente	x	x	x	x				x		
les deux	x	x	x	x						
l'un ou l'autre	x	x	x	x	x	x	x	x		

← vent ou pluie →

On voit bien ici le décompte des événements a ou b lorsqu'ils peuvent être simultanés.

On notera que la seconde relation contient la première puisque si deux événements sont incompatibles : $P(a \text{ et } b) = 0$

3.2 THEOREME DES PROBABILITES COMPOSEES

Il reste maintenant à trouver la probabilité d'apparition simultanée de deux événements a et b : P(a et b) dans le cas le plus général. A priori, deux cas peuvent se présenter suivant que les événements sont simultanés ou consécutifs.

a - Événements simultanés

Soit une population de n objets comprenant :

ISBN : 978-2-9544675-1-1

- $n(a)$ objets présentant le caractère a,
- $n(b)$ objets présentant le caractère b,
- $n(a \text{ et } b)$, ou $n(ab)$, objets présentant les caractères a et b simultanément.

A priori :

$$P(a \text{ et } b) = \frac{n(ab)}{n}$$

que l'on peut écrire :

$$P(a \text{ et } b) = \frac{n(ab)}{n(a)} \cdot \frac{n(a)}{n} = \frac{n(ab)}{n(b)} \cdot \frac{n(b)}{n}$$

$$\frac{n(a)}{n} = P(a) \;,\; \frac{n(b)}{n} = P(b)$$

$\frac{n(ab)}{n(a)} =$ pourcentage des objets de caractère $a.b$ dans la population des objets a,

soit :

$$\frac{n(ab)}{n(a)} = P(b \text{ si } a)$$

de même :

$$\frac{n(ab)}{n(b)} = P(a \text{ si } b)$$

d'où l'on peut déduire :

$$\boxed{P(a \text{ et } b) = P(a) \cdot P(b \text{ si } a) = P(b) \cdot P(a \text{ si } b)}$$

La probabilité d'apparition simultanée de deux événements a et b est égale au produit de la probabilité d'apparition de l'un d'eux par la probabilité d'arrivée de l'autre lorsque l'on sait que le premier s'est produit.

b - Événements consécutifs

Plaçons-nous dans le cas où a et b sont consécutifs et que le fait que l'événement a se produise modifie les données initiales du problème.

La probabilité pour que a se produise est :

$$P(a) = \frac{n(a)}{n_1}$$

n_1 étant le nombre de cas possibles avant l'apparition de a.

Si a se produit, le nombre de cas possibles se modifie et devient n_2. Le nombre de cas favorables à b devient $n(b)_a$. Dans ces conditions, la probabilité pour que b se produise est :

$$P(b \text{ si } a) = \frac{n(b)_a}{n_2}$$

Le nombre des cas possibles correspondant aux deux événements consécutifs est : $n_1 \, n_2$

Le nombre des cas favorables est :

$$n(a)\, n(b)_a$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

La probabilité d'apparition des deux événements est :

$$P(a\ \mathrm{et}\ b) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$
$$= \frac{n(a)\cdot n(b)_a}{n_1\, n_2}$$

d'où :

$$\boxed{P(a\ \mathrm{et}\ b) = P(a)\cdot P(b\ \mathrm{si}\ a)}$$

c - Événements indépendants

Dans certains cas, il peut arriver que l'événement b ne dépende pas de l'apparition de l'événement a, le tirage de l'événement a ne modifiant en rien les probabilités d'apparition de l'événement b.

Les événements a et b sont alors indépendants et on peut écrire : $P(b\ \mathrm{si}\ a) = P(b)$, ce qui dans le cas du paragraphe « a » supposerait $n(ab)/n(a) = n(b)/n$; d'où l'expression :

$$\boxed{P(a\ \mathrm{et}\ b) = P(a)\cdot P(b)}$$

Exemple :

Quelle est la probabilité de sortir deux as d'un jeu de 52 cartes :

- si on ne remet pas la carte dans le jeu,
- si on la remet et mélange à nouveau le jeu.

d - Événements incompatibles

Nous reprendrons ce cas pour remarquer que par nature b ne peut se produire si a se produit ; on a donc automatiquement :

$$P(b\ \mathrm{si}\ a) = 0$$

ce qui est une autre manière de montrer que :

$$P(a\ \mathrm{et}\ b) = 0$$

dans le cas d'événements incompatibles.

On remarquera à ce sujet qu'incompatibilité et indépendance sont des concepts entièrement différents (voire incompatibles !).

3.3 THEOREME DES PROBABILITES INVERSES

Soient deux événements a et b de probabilité d'apparition P(a) et P(b), la probabilité pour que ni a et ni b ne se produisent est celle de l'événement contraire à l'apparition de a ou b.

$$P(\mathrm{ni}\ a,\ \mathrm{ni}\ b) = 1 - P(a\ \mathrm{ou}\ b).$$

Deux approches sont alors possibles :

a - Application du théorème des probabilités totales :

$$P(a\ \mathrm{ou}\ b) = P(a) + P(b) - P(a\ \mathrm{et}\ b)$$

qui se simplifie si a et b sont indépendants en :

ISBN : 978-2-9544675-1-1

$$P(a \text{ ou } b) = P(a) + P(b) - P(a)\,P(b)$$

$$P(ni{\cdot}a,\, ni{\cdot}b) = 1 - P(a \text{ ou } b) = 1 - P(a) - P(b) + P(a){\cdot}P(b)$$

$$\boxed{P(ni \cdot a, ni \cdot b) = (1 - P(a)) \cdot (1 - P(b))}$$

b - Application du théorème des probabilités composées :

Si a et b sont indépendants, les événements contraires *ni·a* et *ni·b* le sont aussi :

Dans ce cas :

$$P(ni{\cdot}a \text{ et } ni{\cdot}b) = P(ni{\cdot}a)\,P(ni{\cdot}b)$$

et :

$$P(ni\ a) = 1 - P(a)$$

$$P(ni\ b) = 1 - P(b)$$

$$P(ni\ a, ni\ b) = (1 - P(a)) \cdot (1 - P(b))$$

4 NOTION DE VARIABLE ALEATOIRE

4.1 DEFINITIONS

On désigne sous le nom de variable aléatoire toute variable qui peut prendre un certain nombre de valeurs *(discrètes ou non),* chacune d'elles n'étant pas prévisible mais pouvant intervenir, à chaque instant ou à chaque épreuve, avec une certaine probabilité. Nous désignerons par X la variable aléatoire et noterons que X n'est pas un nombre bien défini.

Nous désignerons par x un nombre qui peut être une des valeurs possibles de X et qui servira de point de comparaison.

La probabilité pour que X prenne la valeur x sera alors notée en se référant au **nombre de comparaison** x :

$$P(x) \text{ ou } p(x) = P(X \text{ égale } x)$$

Nous retiendrons finalement que X ou Y ou Z, variables aléatoires, ne sont pas définies a priori et que le seul moyen de les qualifier est de les comparer à des nombres x, y ou z, à l'aide de fonctions f(x), h(y) ou g(z), caractéristiques du comportement des variables aléatoires X, Y et Z, mais chiffrées par rapport aux nombres de comparaison x, y et z.

4.2 VARIABLE ALEATOIRE DISCONTINUE

a - Définition

Une variable aléatoire X est dite discontinue si elle ne peut prendre que certaines valeurs x_1, x_2 ... x_k formant une suite finie ou non et aucune autre. Prenons par exemple un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6, le résultat d'un jet de ce dé est une variable aléatoire X qui peut prendre six valeurs :

$$x_1 = 1 \;;\; x_2 = 2 \;;\; x_3 = 3 \;;\; x_4 = 4 \;;\; x_5 = 5 \;;\; x_6 = 6$$

Si le dé n'est pas truqué, on peut a priori évaluer la probabilité pour que X prenne l'une quelconque de ces valeurs ; dans notre cas :

$$P\,\{X = 1\} = p(1) = 1/6 = p(2) = p(3)... = p(6)$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

On remarquera qu'une fois définies les valeurs possibles de X et les probabilités qui y sont attachées, on a défini les n cas possibles et incompatibles entre eux du résultat du tirage d'une épreuve et que par le fait on doit pouvoir écrire :

$$p(1) + p(2) .... + p(n) = 1$$

Nous en déduirons que :

une variable X est une variable aléatoire discontinue si elle peut prendre les valeurs :

$$x_1, x_2 ...... x_n ....$$

avec des probabilités :

$$p(x_1), p(x_2) ..... p(x_n) ...$$

telles que :

$$\sum p(x_k) = 1$$

pour tout x.

La correspondance entre x_k et $p(x_k)$ définit alors la loi de probabilité de la variable X.

b - Représentation graphique d'une loi de probabilité

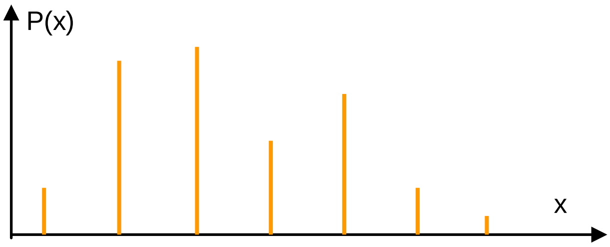
Une fois connues toutes les valeurs possibles x de la variable X et les probabilités associées $p(x)$, on peut dresser une table de correspondance : $x \leftrightarrow p(x)$.

Un moyen pratique d'opérer est le suivant :

On utilise un système d'axes cartésiens :

- en abscisse, on place les diverses valeurs x de X
- en ordonnée, la probabilité $P(x)$ correspondante.

On obtient alors le diagramme suivant :

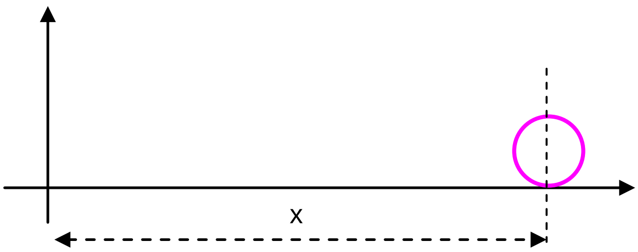


Caractéristique de la « répartition » de X en probabilité.

4.3 VARIABLE ALEATOIRE CONTINUE

a - Approche physique

Imaginons maintenant le jeu suivant : une boule lancée d'une manière aléatoire roule sur un rail, on désigne par X la position occupée par la boule lorsqu'elle s'arrête. X est une variable aléatoire.



ISBN : 978-2-9544675-1-1

Dans ce cas nous voyons que X peut prendre une infinité de valeurs et que x, résultat d'un tirage, peut prendre de manière continue toutes les valeurs du domaine représenté sur la figure par l'axe horizontal.

Nous dirons que la variable aléatoire X est une variable aléatoire continue.

De plus, si le rail est parfaitement lisse, la position de la bille est quelconque, la probabilité pour que lors d'une épreuve X soit exactement égal à une valeur donnée x_0 de x est nulle, car il suffit d'un déplacement infiniment petit pour que cette égalité ne soit pas vérifiée.

Pour nous ramener au cas précédent, nous pouvons partager l'axe ox en segments de longueurs dx et chercher la probabilité pour que X se trouve dans l'un de ces domaines.

$$P\{x \le X < x + dx\}$$

Dès que le domaine dx est suffisamment petit, on peut considérer que toutes les positions de la boule dans ce domaine sont équiprobables, donc la probabilité pour que la boule se trouve dans le domaine dx est proportionnelle à dx.

Nous écrirons donc :

$$P\{x \le X < x + dx\} = f(x) \cdot dx$$

f(x) dépend de l'abscisse du domaine choisi et est repéré par rapport à l'abscisse du début de ce domaine ; f(x)·dx est une probabilité, donc :

f(x) est la densité de probabilité de la variable aléatoire continue X.

Il nous faut maintenant vérifier que la somme des probabilités pour que la boule soit sur l'un quelconque des domaines dx est égale à 1.

Soit :

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(x_i) \cdot dx_i = 1$$

ce qui à la limite, donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1$$

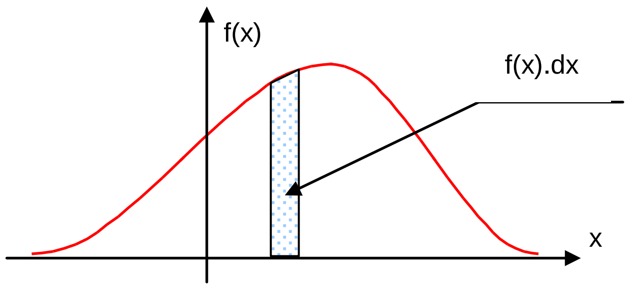
Conclusion :

Une variable aléatoire X est continue lorsqu'elle peut prendre toutes les valeurs possibles d'un domaine. La loi de probabilité de la variable X est alors définie par une densité de probabilité f(x), telle que :

$$P\{x \le X < x + dx\} = f(x) \cdot dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1$$

b - Représentation graphique

Le moyen de représenter la loi de probabilité de la variable X est ici lié à celui de représenter f(x). Nous choisirons donc la représentation cartésienne de f(x).



ISBN : 978-2-9544675-1-1

4.4 FONCTION DE REPARTITION

Au lieu de chercher la probabilité pour que X prenne une valeur déterminée ou se trouve dans un domaine déterminé, on peut chercher à comparer X à un nombre x en cherchant la probabilité pour que X soit inférieur à x. Nous appellerons $F(x)$ la fonction correspondante.

$F(x) = P\{X < x\}$ est la fonction de répartition de la variable x.

Elle peut être continue ou discontinue suivant la nature de la variable aléatoire X, nous allons le voir sur deux exemples.

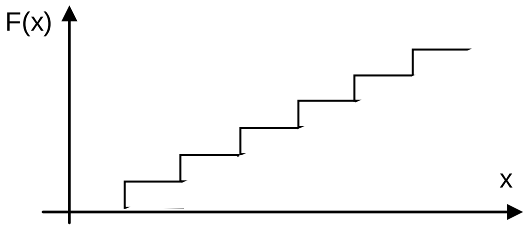
a - Variable discontinue

Reprenons le cas du jeu de dés :

$$P\{X<1\}=0 \; ; \; P\{X<2\}=1/6 \; ; \; P\{X<3\}=2/6 \; ; \; P\{X<4\}=3/6 \; ;$$

$$P\{X<5\}=4/6 \; ; \; P\{X<6\}=5/6 \; ; \; P\{X>6\}=1$$

$F(x)$ est ici une fonction discontinue qui varie par bonds égaux à $p(x_k)$ chaque fois que x passe par la valeur x_k.



En effet :

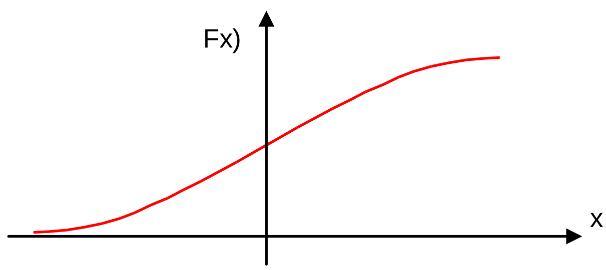
$$F(x) = P\{X < x\} = \sum_{-\infty}^{x} p(x_k).$$

b - Variable continue

Dans ce cas $F(x)$ est une courbe continue mais qui répond toujours aux critères suivants :

- $F(x)$ est constante ou croissante pour tout x.
- $F(-\infty) = 0 \;;\; F(+\infty) = 1$

qui se déduisent facilement de l'exemple précédent.



On peut chercher la relation liant $f(x)$ et $F(x)$. Pour cela, calculons la probabilité pour que X soit compris entre x_1 et x_2.

$$P\{x_1 \le X < x_2\} = 1 - P\{X < x_1 \text{ ou } x_2 \le X\}$$
$$= 1 - (F(x_1) + 1 - F(x_2))$$

car on ne peut avoir à la fois :

$$X < x_1 \text{ et } X \ge x_2 \rightarrow (x_1 < x_2)$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

donc

$$P\{x_1 \leq X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

par ailleurs si :

$$x_1 = x \text{ et } x_2 = x + dx$$

$$f(x)dx = P\{x \leq X < x + dx\} = F(x + dx) - F(x) = d\,F(x)$$

D'où :

$$f(x) = \frac{d\,F(x)}{dx}$$

Et :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

5 MOYENNE ET MOMENTS

5.1 VALEUR MOYENNE

Une variable aléatoire est parfaitement définie par sa loi de probabilité donc par sa densité de probabilité ou sa fonction de répartition.

Néanmoins, en pratique, on caractérise une variable aléatoire par certains paramètres qui permettent de la situer rapidement.

Le premier est la valeur moyenne en probabilité ou espérance mathématique :

$$m = E(X) = \sum x_i p(x_i)$$

qui représente la valeur que l'on obtiendrait en prenant la moyenne des résultats d'un nombre infini d'épreuves sur la variable car en effet :

$$p(x_i) = \frac{\text{nb de cas favorables à } x_i}{\text{nb de cas possibles}} = \frac{n_i}{n}$$

$$m = \sum \frac{x_i \cdot n_i}{n}$$

moyenne pondérée des x_i par rapport à leur nombre probable d'apparitions.

Dans le cas du jeu de dés par exemple :

$$m = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

Dans le cas d'une variable continue on peut écrire :

$$\sum p(x_i)x_i = \sum x_i f(x_i)dx_i$$

et à la limite

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx$$

Si on remarque que :

- pour une variable discontinue : $dF(x) = p(x_i)$
- pour une variable continue : $dF(x) = f(x)dx$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

on pourra écrire $E(X)$ sous la forme générale :

$$m = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot dF(x)$$

équivalent à :

- pour une variable discontinue :

$$E(X) = \sum x_i \cdot p(x_i)$$

- pour une variable continue :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$$

5.2 VALEUR QUADRATIQUE MOYENNE

La même opération peut se faire sur une fonction quelconque $h(X)$ de la variable aléatoire X, cela revient, par exemple dans le cas du jeu de dés, à changer la valeur des nombres marqués sur les dés. On a alors :

$$E\big(h(X)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot dF(x)$$

En particulier si $h(X) = x^2$, on obtient :

$$m_2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x)$$

valeur quadratique moyenne de X.

5.3 ECART TYPE

On définit **l'écart type σ** par la relation :

$$\sigma^2 = E(X - m)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 dF(x)$$

σ est représentatif de la dispersion de la variable aléatoire autour de sa moyenne.

En effet, si X s'écarte peu de m, σ est petit, si X s'écarte beaucoup de m, σ est grand.

σ^2 est appelé variance de la variable aléatoire *X*.

La variance se déduit de m_2 et m :

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m^2) \cdot dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot dF(x) - 2m\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot dF(x) + m^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cdot dF(x)$$

$$= m_2 - 2m \cdot m + m^2$$

$$\sigma^2 = m_2 - m^2$$

5.4 OPERATIONS SUR LES MOYENNES ET MOMENTS

a - Moyenne d'une somme

Si $Z = X + Y$, nous admettrons sans démonstration :

$$E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

b - Moyenne d'un produit de deux variables indépendantes

Si $Z = X\,Y$, nous admettrons sans démonstration :

$$E(Z) = E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

c - Moyenne quadratique d'une somme

$$E(X + Y)^2 = E(X^2) + E(Y^2) + 2.E(XY)$$

Si les variables sont **indépendantes et de valeur moyenne nulle,** l'expression se simplifie en :

$$E(X + Y)^2 = E(X^2) + E(Y^2)$$

ce qui permet d'écrire dans le cas de variables aléatoires indépendantes :

$$\sigma^2(X + Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y)$$

6 LOIS DE PROBABILITES USUELLES A UNE VARIABLE

6.1 LOI BINOMIALE

Soit une variable aléatoire pouvant prendre deux valeurs :

- la valeur 1 avec la probabilité p,
- la valeur zéro avec la probabilité $q = (1 - p)$.

Considérons n tirages consécutifs et indépendants de la variable et cherchons la loi de probabilité de la somme des n tirages. La somme des valeurs tirées est un nombre compris entre 0 et n : k.

La probabilité d'une suite contenant k valeur 1 et $n - k$, valeur zéro, est :

$$p^K q^{n-k} = p^K (1-p)^{n-k}$$

Le problème revient à chercher le nombre de suites de ce type qui peuvent apparaître lors de n tirages :

Le nombre de manières de ranger n termes est : $P_n = n\,!$

Mais dans l'ensemble des suites ainsi créées, plusieurs sont équivalentes à notre problème. En effet, dans les permutations on considère comme distincts des termes de la forme :

$$\begin{matrix} A_1 & A_2 & B_1 & .... \\ A_2 & A_1 & B_2 & .... \end{matrix} \; : \left(A = 1 \quad B = 0\right)$$

qui pour nous sont équivalents puisque contenant des termes de même type en même nombre.

Il nous faut donc diviser P_n par le nombre de permutations des 1 entre eux soit P_k, et par le nombre de permutations des 0 entre eux, soit P_{n-k}.

Le nombre de suites contenant k « 1 » et n – k « 0 » est donc :

$$N = \frac{n!}{k!\left(n - k\right)!} = C_n^k$$

Ainsi définies, toutes les suites sont incompatibles. On peut donc appliquer le théorème des probabilités totales :

$$P(a \text{ ou } b \text{ ou } c\ldots.. \text{ ou } z) = P(a) + P(b)\ldots.. + P(z)$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

soit :

$$P\{X=k\} = p(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Nota :

$p(k)$ est le k^e terme du développement du produit remarquable $(p+q)^n$, qui est égal à 1 puisque $q = 1 - p$ ce qui montre bien que :

$$\sum_0^n p(k) = 1$$

6.2 LOI DE POISSON

C'est une loi de probabilité d'une variable discontinue définie par :

$$p(k) = P\{X=k\} = \frac{a^k}{k!} \cdot e^{-a}$$

On vérifie aisément que :

$$\sum_0^\infty p(k) = 1 \quad \text{et que} \quad E(X) = a$$

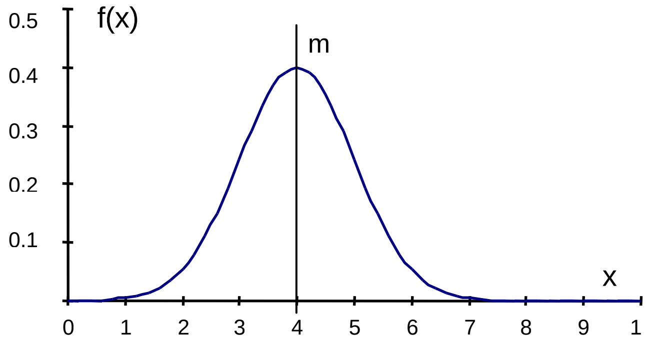
Nous admettrons sans démonstration que cette loi est une loi limite de la précédente dès que $n > 100$ et $np \sim 1$ à 10, en posant $np = a$.

6.3 LOI NORMALE OU DE GAUSS

Soit X une variable aléatoire continue ayant pour densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, exp\left\{ -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

Elle répond à une loi normale de moyenne m et d'écart type σ.



Cette loi possède plusieurs propriétés importantes parmi lesquelles :

- la somme de n variables aléatoires gaussiennes indépendantes est une variable gaussienne ayant pour moyenne la somme des moyennes des variables élémentaires et pour variance la somme de leurs variances,
- la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi quelconque tend lorsque n devient grand vers une loi de Gauss répondant aux conditions précédentes.

La loi de Gauss est donc par excellence, la loi choisie pour représenter un phénomène aléatoire aux causes multiples.

ISBN : 978-2-9544675-1-1

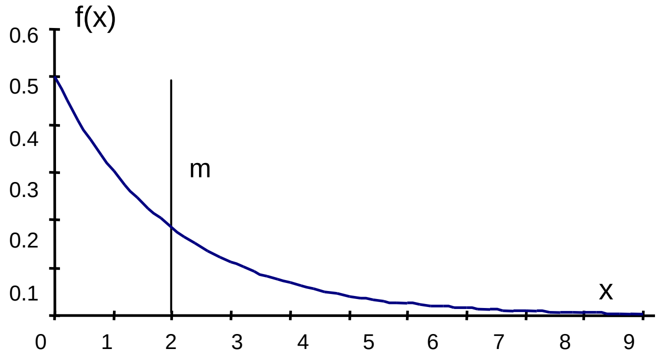
Dans de nombreux cas, on se ramène à une **loi de Gauss réduite** de moyenne $m = 0$ et d'écart type $\sigma = 1$. Dans ce cas on a :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$$

6.4 LOI DE LAPLACE

C'est la loi de probabilité d'une variable aléatoire ayant pour densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{m} e^{-x/m} \;\; ; \;\; si : x > 0, \text{ et } f(x) = 0 \text{ pour } x < 0$$



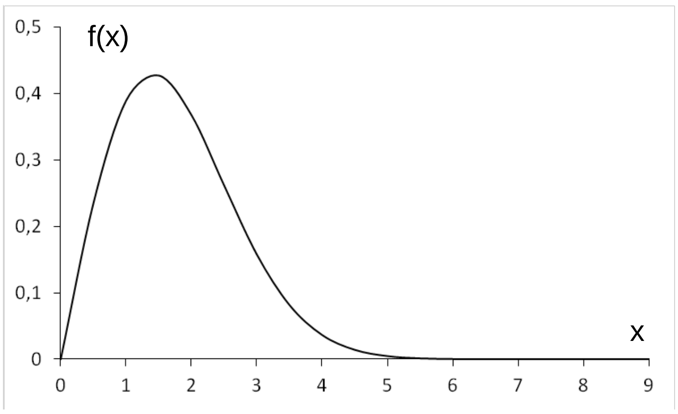
- Sa moyenne est m
- Sa moyenne quadratique : $2m^2$
- Sa variance : m^2

Elle est utilisée comme loi de fluctuation de cible dans les modèles dits de SWERLING 1 et 2.

6.5 LOI NORMALE CIRCULAIRE OU DE RAYLEIGH

C'est la loi de probabilité d'une variable aléatoire ayant pour densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{2x}{m_2} e^{-x^2/m_2} \text{ pour } x > 0$$



- Sa moyenne est $(\pi \cdot m_2/4)^{0,5}$
- Sa moyenne quadratique est : m^2

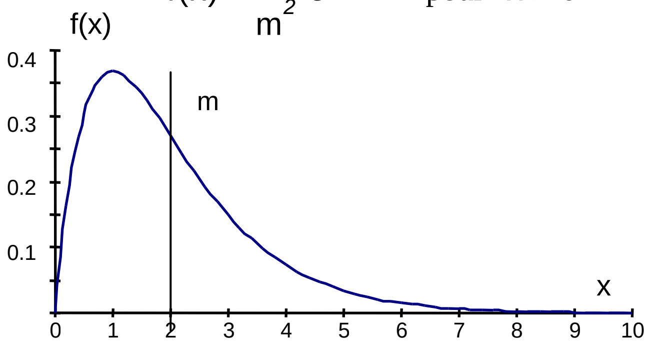
Un signal dont l'amplitude suit une loi de RAYLEIGH a une puissance variant selon la loi de LAPLACE (Cf. § 8.1.3).

ISBN : 978-2-9544675-1-1

6.6 LOI DU KHI^2 A 4 DEGRES DE LIBERTE

Une autre loi utilisée en radar est la « loi du khi^2 à 4 degrés de liberté ». Elle répond à la densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{4x}{m^2} e^{-2x/m} \quad \text{pour} \quad x > 0$$



- Sa moyenne est m
- Sa moyenne quadratique : $3/2\ m^2$
- Sa variance : $m^2/2$

C'est la loi de la somme du carré de quatre variables gaussiennes de variance 0,25 m ou de deux variables de Laplace de moyenne 0,5 m (Cf. § 8.2.3). Elle est utilisée comme loi de fluctuation de cible dans les modèles dits de SWERLING 3 et 4.

7 NOTIONS SUR LES COUPLES DE VARIABLES ALEATOIRES

7.1 DEFINITIONS

Soit une épreuve faisant intervenir deux variables distinctes : X et Y.

On considère maintenant une variable aléatoire liée au couple XY telle que :

- pour une variable discontinue

$$p(x_i, y_j) = P\{X = x_i \text{ et } Y = y_j\}$$

- pour une variable continue

$$p(x, y) = P\{x \le X < x + dx \quad \text{et} \quad y \le Y < y + dy\}$$

Le couple XY peut être représenté par la position d'un point dans un plan, chaque position étant affectée d'une probabilité.

Pour une variable discontinue, le point représentant le couple XY ne peut occuper que des positions discrètes et on doit vérifier la relation :

$$\Sigma_i \Sigma_j p(x_i, y_j) = 1$$

Pour une variable continue, le point représentant le couple XY peut occuper une position quelconque dans le plan

p(x, y) représente la probabilité pour qu'il se trouve dans **la surface dx . dy.** On pourra donc définir comme dans le cas d'une seule variable une densité de probabilité : $\varphi(x,y)$ et écrire :

$$\boxed{p(x,y) = P\{x \le X < x + dx \text{ et } y \le Y < y + dy\} = \varphi(x,y) \cdot dxdy}$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

et on devra vérifier :

$$\iint \varphi(x,y)\cdot dxdy = 1$$

7.2 CAS OU X ET Y SONT INDEPENDANTES

Lorsque X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, les lois du couple se déduisent des lois de chaque variable par application du théorème des probabilités composées. On a alors :

$$p(x_i, y_i) = P\{X = x_i \text{ et } Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}$$

$$p(x_i, y_j) = p_1(x_i)\cdot p_2(y_j)$$

ce qui se traduit pour des variables aléatoires continues par :

$$p(x,y) = \varphi(x,y)\cdot dx \cdot dy$$

$$p_1(x) = f_1(x)\cdot dx$$

$$p_2(y) = f_2(y)\cdot dy$$

soit :

$$\boxed{\varphi(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y)}$$

7.3 MOYENNE ET MOMENTS POUR UN COUPLE

On peut définir pour un couple de variable aléatoire des moments d'une fonction $h(X, Y)$ du couple. Comme pour les variables uniques ces moments se définissent par :

$$E\big(h(X,Y)\big) = \Sigma h(x_i, y_i)\cdot p(x_i, y_i)$$

dans le cas d'une variable discontinue, soit :

$$E\big(h(X,Y)\big) = \iint h(x,y)\cdot \varphi(x,y) dx \cdot dy$$

dans le cas d'une variable continue.

a - Exemple 1 : MOYENNE DE LA SOMME X + Y

$$E(X+Y) = \iint (x+y)\cdot \varphi(x,y)\cdot dx\cdot dy$$

Dans le cas de variables indépendantes :

$$\varphi(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$$

Il vient donc :

$$E(X+Y) = \iint x\cdot f_1(x)\cdot f_2(y)\cdot dx\cdot dy + \iint y\cdot f_1(x)\cdot f_2(y) dxdy$$

$$E(X+Y) = \int x\cdot f_1(x)\cdot dx \int f_2(y)\cdot dy + \int y\cdot f_2(y)\cdot dy \int f_1(x)\cdot dx$$

$$\boxed{E(X+Y) = E(X) + E(Y)}$$

NOTA : Cette démonstration peut s'étendre à des variables quelconques.

b - Exemple 2 : MOYENNE DU PRODUIT de deux variables indépendantes : XY

$$E(XY) = \iint xy\cdot \varphi(x,y)\cdot dx\cdot dy$$

Dans le cas de variables indépendantes :

$$\varphi(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$$

$$E(XY) = \int x\cdot f_1(x)\cdot dx \int y\cdot f_2(y)\cdot dy$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

$$\boxed{E(XY) = E(X) \cdot E(Y)}$$

NOTA : La condition d'indépendance est ici impérative.

7.4 FONCTION DE REPARTITION POUR UN COUPLE

La fonction de répartition d'un couple de variables aléatoires sera définie comme dans le cas des variables uniques par :

$$F(x, y) = P\{X < x \text{ et } Y < y\}$$

On démontrerait également pour des variables continues :

$$\varphi(xy) = \frac{\delta^2 F(x, y)}{\delta x \cdot \delta y}$$

Cette propriété peut permettre un calcul rapide de $\varphi(x, y)$.

8 VARIABLE ALEATOIRE FONCTION D'AUTRES VARIABLES ALEATOIRES

8.1 FONCTION D'UNE SEULE VARIABLE

8.1.1 Méthode générale

Soit une variable aléatoire X et une seconde Y liée à X par une relation mathématique connue :

$$Y = h(X)$$

Le problème posé est le suivant, connaissant : d'une part la loi de probabilité de X, d'autre part la fonction h, trouver la loi de probabilité de Y.

a - h est une loi monotone

On connaît :

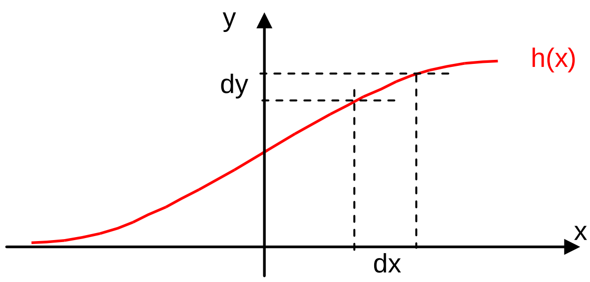
$$f(x) \cdot dx = P\{x \le X < x + dx\}$$

et on cherche :

$$g(y) \cdot dy = P\{y \le Y < y + dy\}$$

Traçons la courbe $y = h(x)$. Il existe une correspondance biunivoque entre y et x. A un intervalle déterminé x, $x + dx$ ne correspond qu'un seul intervalle y, $y + dy$. La probabilité pour que X se trouve dans le premier intervalle est égale à la probabilité pour que Y se trouve dans l'intervalle correspondant.

$$P\{y \le Y < y + dy\} = P\{x \le X < x + dx\}$$



ISBN : 978-2-9544675-1-1

soit :

$$|g(y)\cdot dy| = |f(x)\cdot dx|$$

égalité à prendre en valeur absolue car les probabilités sont des nombres positifs. Et comme :

$$y = h(x) \quad \text{ou} \quad x = h^{-1}(y)$$

$$g(y) = \left| f\left(h^{-1}(y)\right) \cdot \frac{dx}{dy} \right|$$

ou :

$$\boxed{\begin{aligned} g(y) &= \left| f(h^{-1}(y)) \cdot h^{-1}(y)' \right| \\ f(x) &= \left| g(h(x)) \cdot h'(x) \right| \end{aligned}}$$

b - h est une loi quelconque

On décompose alors h en tronçons h_1 h_2 h_n... de fonctions monotones. Le raisonnement précédent peut alors s'appliquer séparément à chacun des tronçons et on aura finalement :

$$P\{y < Y < y + dy\} = \Sigma_i P\{x_i \le X < x_i + dx_i\}$$

soit :

$$\boxed{g(y) = \Sigma_i \left| f(h^{-1}(y_i)) \cdot h^{-1}(y_i)' \right|}$$

8.1.2 Exemples

a - X Loi de Laplace $y = \sqrt{x}$ pour y >0

$f(x) = \frac{1}{m} e^{-x/m}$ définie pour $x > 0$

Dans ce cas h(x) s'inverse facilement et on peut trouver :

$h^{-1}(y) = x = y^2$, loi monotone puisque $y > 0$

$$f(h^{-1}(y)) = \frac{1}{m} e^{-y^2/m}$$

$$h^{-1}(y) = \frac{dx}{dy} = 2y$$

L'application de la solution générale donne alors :

$$g(y) = \left| f\left(h^{-1}(y)\right)\left(h^{-1}(y)\right)' \right| = \frac{1}{m} e^{-y^2/m}.2y$$

$$\boxed{g(y) = \frac{2y}{m} e^{-y^2/m}}$$

On retrouve la loi normale circulaire ou de Rayleigh de moyenne quadratique m.

b - X Loi de Laplace $y = \pm\sqrt{x}$

Dans ce cas on peut écrire :

ISBN : 978-2-9544675-1-1

$$|g(y)dy| + |g(-y)dy| = f(x)dx \text{ et } g(y) = g(-y)$$

d'où :

$$g(y) = g(-y) = \frac{1}{2}\left| f\left(h^{-1}(y)\right)\left(h^{-1}(y)\right)' \right|$$

$$\boxed{g(y) = \frac{|y|}{m} e^{-y^2/m}}$$

c - A partir de la loi du « *b* » retrouver la loi de *x = y²* :

la loi inverse est $y = \pm\sqrt{x}$ *(deux déterminations pour x*) ; il faut donc écrire :

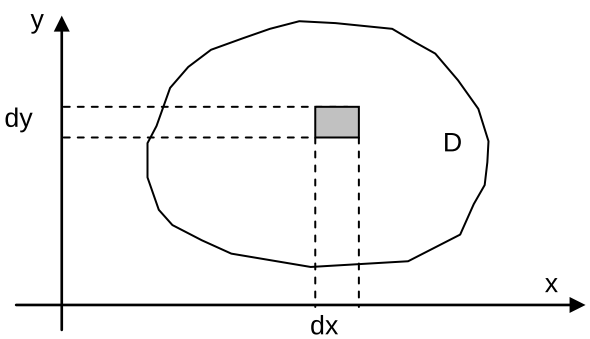
$$f(x) = \left|g\left(-\sqrt{x}\right)\right|\left|\frac{d\left(-\sqrt{x}\right)}{dx}\right| + \left|g\left(+\sqrt{x}\right)\right|\left|\frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{dx}\right|$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{m} e^{-x/m} \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{m} e^{-x/m} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{m} e^{-x/m}}$$

8.2 FONCTION D'UN COUPLE DE DEUX VARIABLES ALEATOIRES

Soit un couple de deux variables aléatoires X et Y, dans un domaine d’existence D et de densité de probabilité : φ(x, y).



Par définition de la loi de probabilité, nous savons que :

$$\varphi(x,y) \cdot dx \cdot dy = P\{x \leq X < x + dx \text{ et } y \leq Y < y + dy\}$$

ce qui représente la probabilité pour qu'un point M de coordonnées x et y se trouve dans un domaine de dimension ds = dx dy.

On peut associer à chaque position du point M une nouvelle grandeur Z qui sera aléatoire puisque la position de M est aléatoire.

Le problème posé est alors de trouver la loi de probabilité de *Z* connaissant : la loi du couple XY et la relation reliant Z à X et Y :

Z = g(X, Y).

ISBN : 978-2-9544675-1-1

8.2.1 Méthode générale

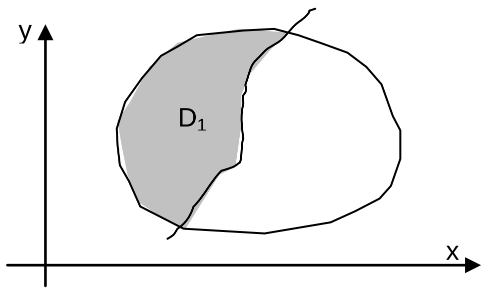
On connaît le domaine D à l'intérieur duquel le couple XY est défini. On se fixe une valeur z de Z qui détermine dans le domaine D une courbe γ

$$g(x, y) = z$$

Cette courbe γ divise le domaine D en deux parties. Deux méthodes sont alors applicables :

on recherche le domaine D_1 dans lequel $Z < z$ et on écrit la probabilité pour que $Z < z$ qui est celle pour que M se trouve dans le domaine D_1.

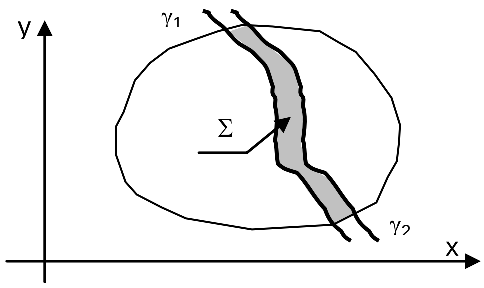
$$\boxed{P\{Z < z\} = F(z) = \iint_{D_1} \varphi(x,y) \cdot dx \cdot dy}$$



b) On trace deux courbes, définissant dans D un domaine Σ :

- γ_1 définie par $g(x, y) = z$
- γ_2 définie par $g(x, y) = z + dz$

$$\boxed{P\{z \le Z < z + dz\} = f(z) \cdot dz = \iint_{\Sigma} \varphi(x,y) \cdot dx \cdot dy}$$



8.2.2 Moyen de calcul

La résolution des intégrales peut parfois amener à des changements de variables. L'un d'eux consiste à exprimer x et y en fonction de z et d'un paramètre t sous la forme paramétrique :

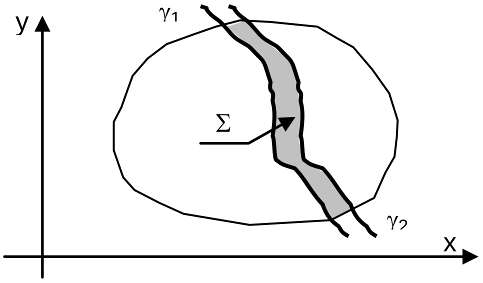
$$x = x(z, t)$$

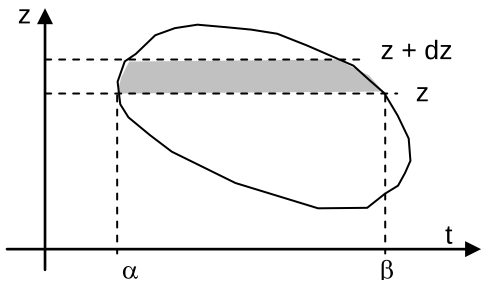
$$y = y(z, t)$$

On définit ainsi un nouveau plan z, t, si à un point μ de ce plan correspond un seul point M et réciproquement le domaine D du plan xy se transforme en un domaine Δ du plan z, t.

Les deux courbes γ_1, et γ_2 se transforment également pour devenir deux droites parallèles à l'axe des t d'ordonnées z et z + dz.

ISBN : 978-2-9544675-1-1





Par ailleurs, on sait que la surface dx . dy se transforme en une surface telle que :

$$ds = dx \cdot dy = |J| \cdot dz \cdot dt$$

J étant le Jacobien qui s'écrit sous forme d'un déterminant de matrice

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta z}, \frac{\delta x}{\delta t} \\ \frac{\delta y}{\delta z}, \frac{\delta y}{\delta t} \end{vmatrix}$$

d'où :

$$\iint_{\Sigma} \varphi(x, y) \cdot dx \cdot dy = \int_{z}^{z+dz} \int_{x}^{\beta} \varphi\big(x(z,t), y(z,t)\big)|J| \cdot dz \cdot dt$$
$$= \int_{z}^{z+dz} dz \int_{\alpha}^{\beta} \varphi\big(x(z,t), y(z,t)\big) \cdot |J| \cdot dt$$

et comme :

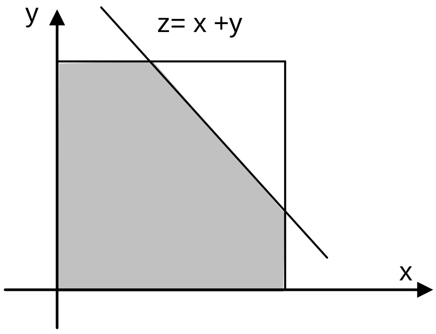
$$\iint \varphi(x,y) \cdot dx \cdot dy = f(z) \cdot dz \text{ et pour toute fonction de } z : \int_{z}^{z+dz} h(z)dz = dz \cdot h(z)$$

$$f(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi\big(x(z,t), y(z,t)\big) \cdot |J| \cdot dt$$

Cette méthode sera à appliquer dès que α et β seront faciles à calculer. Dans le cas général α et β sont des fonctions de *z*.

8.2.3 Applications

a - X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes équiréparties entre 0 et 1 Z = X+Y:

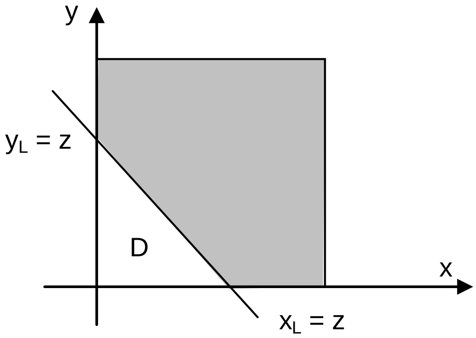


On déduit de l'énoncé : $\varphi(x,y) = 1$ et on trace la droite : $\gamma \Rightarrow z = x + y$. Le domaine dans lequel $Z < z$ est le domaine grisé.

ISBN : 978-2-9544675-1-1

Deux possibilités sont à examiner :

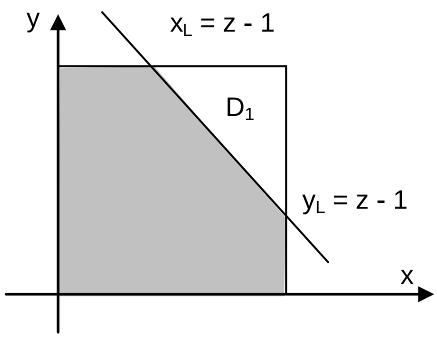
1. $0 < Z < 1$



$$\iint_{D} dx \cdot dy = \frac{1}{2} x_L \; y_L$$

$$F(z) = \frac{1}{2} z^2$$

2. $1 < Z < 2$



$$\iint_{D} dx \cdot dy = 1 - \iint_{D_1} dx \cdot dy$$

$$F(z) = 1 - \frac{(1-(z-1))^2}{2}$$

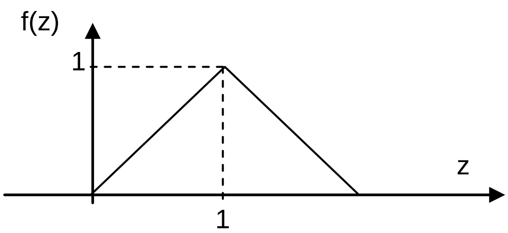
$$F(z) = 1 - \frac{(2-z)^2}{2}$$

d'où :

$$\boxed{f(z) = \frac{dF(z)}{dz} =}$$

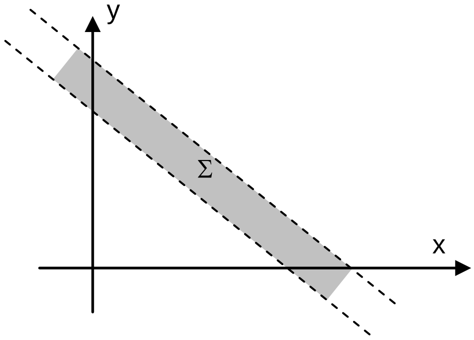
$0 < Z < 1 : f(z) = z$

$1 < Z < 2 : f(z) = 2 – z$



ISBN : 978-2-9544675-1-1

b - X et Y définies entre + ∞ et - ∞ ; Z = X + Y



On suppose connue la fonction : $\varphi(x, y)$.

Dans ce cas la méthode du changement de variables est applicable.

Posons : $x + y = Z$ et choisissons une variable intermédiaire *t* telle que :

$$x = t$$

$$y = z - t$$

t peut varier de entre $-\infty$ à $+\infty$.

Le Jacobien est :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta z}, & \frac{\delta x}{\delta t} \\ \frac{\delta y}{\delta z}, & \frac{\delta y}{\delta t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & , & 1 \\ 1 & , & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$|J| = 1$$

$$\iint_{\Sigma} \varphi(x,y) \cdot dx \cdot dy = \int_{z}^{z+dz} dz \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t, z - t) \cdot dt$$

$$= dz \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t, z - t) \cdot dt$$

d'où :

$$\boxed{f(z) = dz \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t, z - t) \cdot dt}$$

Application :

X et Y sont deux variables indépendantes gaussiennes de valeur moyenne nulle :

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \quad \exp\left\{ \frac{-x^2}{2\sigma_1^2} \right\}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \quad \exp\left\{ \frac{-y^2}{2\sigma_2^2} \right\}$$

Dans ce cas, on peut écrire :

$$\varphi(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y) = \frac{1}{2\pi\, \sigma_1\, \sigma_2} \quad \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} \right) \right\}$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

$$\varphi(t, z - t) = \frac{1}{2\pi\,\sigma_1\,\sigma_2} \quad \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{\sigma_1^2} + \frac{(z-t)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}$$

Pour démontrer que la somme de deux variables gaussiennes est une variable gaussienne ayant pour variance la somme des variances, nous allons donc tenter de faire apparaître la forme :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-z^2/2\sigma^2}\text{, avec : }\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

$$\varphi(t, z-t) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\ \exp\left\{\frac{-z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right\}\ \exp\left\{\frac{+z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - \frac{t^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(z-t)^2}{2\sigma_2^2}\right\}$$

Tous calculs faits, on trouve :

$$\varphi(t, z-t) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\ \exp\left\{\frac{-z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right\}\ \exp\left\{\frac{-(t(\sigma_1^2+\sigma_2^2) - z\sigma_1^2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right\}$$

et :

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t, z-t)\,dt = G(z)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{\frac{-(t(\sigma_1^2+\sigma_2^2) - z\sigma_1^2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right\}dt$$

avec :

$$G(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\ \exp\left\{\frac{-z^2}{2\cdot\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}\right\}$$

Posons :

$$u = t\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right) \qquad dt = \frac{du}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

$$f(z) = G(z)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\ \exp\left\{\frac{-(u - z\sigma_1^2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right\}du$$

$$= \left[\ G_z\cdot\frac{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_1\sigma_2\ \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\exp\left\{\frac{-(u - z\sigma_1^2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right\}du\ \right]$$

L'expression sous le signe somme est une loi de Gauss en u de moyenne $z\cdot\sigma_1^2 = m$ et d'écart type :

$$\sigma_1\sigma_2\ \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2} = \sigma$$

Et nous savons que :

ISBN : 978-2-9544675-1-1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma}} \exp\left\{\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot du = 1$$

d'où :

$$f(z) = G(z) \cdot \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} =$$

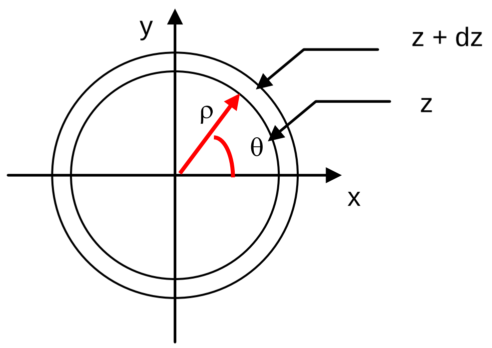
$$f(z) = \frac{1}{2\pi\, \sigma_1^2 \sigma_2^2} \cdot \frac{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \exp\left\{\frac{-z^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right\}$$

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \exp\left\{\frac{-z^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right\}}$$

Nous avons bien démontré la propriété énoncée au paragraphe 6.3.

c - X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes gaussiennes toutes deux de moyenne nulle et d'écart type σ – Z = X^2 + Y^2.

Dans ce cas les courbes γ_1 et γ_2 sont deux cercles de rayon $\sqrt{z} + dz$ et $\sqrt{z}$ centrés à l'origine.



$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{\frac{-(x^2 + y^2)}{2\sigma^2}\right\}$$

La propriété précédente amène à définir les coordonnées polaires ρ et θ avec :

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$tg(\theta) = \frac{y}{x},$$

et :

$$ds = dx\, dy = \rho d\theta\, dp$$

Il vient donc :

$$f(z) \cdot dz = \iint_\Sigma \varphi(x,y) \cdot dx, dy = \int_{\sqrt{z}}^{\sqrt{z+dz}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{\frac{-\rho^2}{2\sigma^2}\right\} \rho . d\theta \cdot d\rho$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

soit :

$$f(z)\cdot dz = \int_{\sqrt{z}}^{\sqrt{z+dz}} \frac{1}{2\sigma^2} \quad \exp\left\{\frac{-\rho^2}{2\sigma^2}\right\} \quad 2\rho\cdot d\rho$$

Posons : $u = \rho^2$

$$f(z)\cdot dz = \int_{z}^{z+dz} \frac{1}{2\sigma^2} \quad \exp\left\{\frac{-u}{2\sigma^2}\right\} \quad \cdot du$$

$$\boxed{f(z)\cdot dz = \frac{1}{2\sigma^2} \quad \exp\left\{\frac{-z}{2\sigma^2}\right\} \quad \cdot dz}$$

C'est une loi de Laplace de moyenne $2\sigma^2$

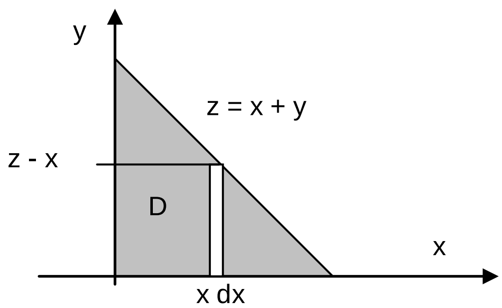
En se rapportant au § 8.1.3 on démontrerait en outre que la variable

$$\rho = (x^2 + y^2)^{0,5}$$

a pour loi : Une loi de Rayleigh de moyenne quadratique $2\sigma^2$

d - X et Y sont deux variables aléatoires Indépendantes suivant une loi de Laplace de moyenne M = m/2 – Z = X + Y.

Les deux variables x et y sont des variables positives, le domaine d'existence de z est donc le suivant :



Dans ce domaine la droite $z = x + y$ définit une surface fermée D à l'intérieur de laquelle, pour tout point $P = (X,Y)$ on peut écrire :

$$Z = X + Y < z$$

donc :

$$F(z) = P\{Z<z\} = \int_{D} \phi(x,y)\cdot dx\cdot dy$$

si $\phi(x,y)$ est la densité de probabilité du couple (x,y). En outre :

$$f_1(x) = \frac{1}{M}\exp\left\{-\frac{x}{M}\right\}$$

$$f_2(y) = \frac{1}{M}\exp\left\{-\frac{y}{M}\right\}$$

et

$$\phi(x,y) = f_1(x)\, f_2(y)$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

On peut donc écrire :

$$F(z) = \int_{0}^{z} \frac{1}{M}\exp\left\{-\frac{x}{M}\right\}\cdot dx \cdot \int_{0}^{z-x} \frac{1}{M}\exp\left\{-\frac{y}{M}\right\}\cdot dy$$

La seconde intégrale est égale à :

$$\int_{0}^{z-x} \frac{1}{M}\exp\left\{-\frac{y}{M}\right\}\cdot dy = \left[-\exp\left\{-\frac{y}{M}\right\}\right]_0^{z-x} = 1 - \exp\left\{\frac{-(z-x)}{M}\right\}$$

donc :

$$F(z) = \int_{0}^{z} \frac{1}{M}\cdot\exp\left\{-\frac{x}{M}\right\}\cdot dx - \exp\left\{-\frac{z}{M}\right\} \int_{0}^{z} \frac{dx}{M}$$

$$F(z) = 1 - \exp\left\{-\frac{z}{M}\right\} - \frac{z}{M}\exp\left\{-\frac{z}{M}\right\}$$

et la densité de probabilité de z, dérivée de la précédente :

$$f(z) = \frac{z}{M^2} = \exp\left\{-\frac{z}{M}\right\}$$

soit en posant : $M = m/2$:

$$\boxed{F(z) = 1 - \exp\left\{-\frac{2\cdot z}{m}\right\} - \frac{2\cdot z}{m}\exp\left\{-\frac{2\cdot z}{m}\right\}}$$

$$\boxed{f(z) = \frac{4\cdot z}{m^2} = \exp\left\{-\frac{2\cdot z}{m}\right\}}$$

on retrouve bien la loi de probabilité du khi^2 du paragraphe 6.6.

9 CONCLUSIONS

Ce que nous venons de voir ne constitue qu'une faible partie de l'étude des probabilités applicable à la question qui nous intéresse ; le traitement probabiliste du signal radar.

On a démontré en particulier que :

- Une variable aléatoire suivant une loi du khi^2 à n (pair) degrés de liberté de moyenne m, est la somme du carré de n (pair) variables gaussiennes de variance m / n.
- Une variable aléatoire suivant une loi de Laplace de moyenne m est la somme du carré de deux variables aléatoires indépendantes gaussiennes de variance $0{,}5\ m$
- La loi de Laplace est donc une loi une loi du khi^2 à 2 degrés de liberté
- Une variable aléatoire suivant une loi du khi^2 à 4 degrés de liberté de moyenne m somme du carré de quatre variables gaussiennes de variance $0.25\ m$ ou de deux variables de Laplace de moyenne $0{,}5\ m$.

Et quelques autres notions que l’on utilisera de la manière suivante :

- recherche d'un modèle mathématique caractéristique d'un phénomène aléatoire physique dont on veut étudier le comportement statistique.
- application de ce modèle au problème mathématique fixé par le procédé de traitement envisagé.

ISBN : 978-2-9544675-1-1

Le choix du modèle constitue l'opération la plus délicate car le modèle doit « suivre » au mieux le phénomène physique étudié tout en restant accessible au calcul.

DEUXIEME PARTIE
APPLICATION AU TRAITEMENT DU SIGNAL

10 ETUDE PROBABILISTE DU BRUIT

10.1 LE BRUIT VARIABLE ALEATOIRE FONCTION DU TEMPS

Le bruit répond en effet à deux propriétés :

- la tension de bruit varie au cours du temps,
- sa variation au cours du temps est imprévisible.

Ces deux propriétés montrent que le bruit est à la fois variable aléatoire et fonction du temps *(et même fonction continue du temps).* Nous regrouperons ces deux propriétés en disant que le bruit est **une fonction aléatoire** du temps.

Comme nous l'avons déjà vu aux chapitres précédents, cette propriété n'est pas suffisante pour caractériser le bruit, il faut, en outre, supposer qu'il possède deux propriétés complémentaires :

a - Le bruit est une fonction aléatoire stationnaire

Les caractéristiques principales du bruit, et les lois des probabilités qui régissent son caractère de variable aléatoire sont invariables dans l'échelle de temps qui nous intéresse. Cette qualité peut être vérifiée expérimentalement sur un bruit convenablement régulé en puissance.

b - Le bruit répond au principe ergodique

Une fonction aléatoire peut être étudiée en tenant compte :

- de son déroulement au cours du temps
- des lois de probabilité qui la régissent.

On dit qu'une fonction aléatoire est ergodique si l'étude de l'un quelconque de ses paramètres par l'une ou l'autre méthode aboutit au même résultat.

En particulier si un phénomène aléatoire est ergodique sa moyenne statistique est égale à sa moyenne temporelle, soit :

$$E(X)^n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f(x) \cdot dx = m_n = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^n(t) \cdot dt$$

Nous supposerons que le bruit répond au principe ergodique.

10.2 LE BRUIT EN MOYENNE FREQUENCE

Toute tension moyenne fréquence peut être représentée par l'expression :

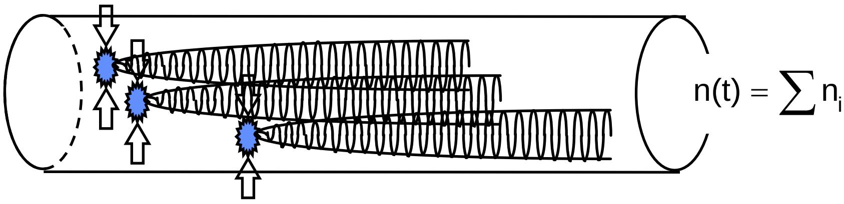
$$\upsilon(t) = \rho \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \alpha \cdot \cos(\omega t) + \beta \cdot \cos(\omega t + \pi/2)$$

ρ et φ ou α et β sont des fonctions du temps. Dans le cas d'une variable déterministe ce sont des fonctions connues du temps.

Dans le cas d'une variable aléatoire, tel le bruit, α et β sont des fonctions qui changent continûment au cours du temps mais en suivant les lois du hasard. Nous poursuivrons la

ISBN : 978-2-9544675-1-1

définition du modèle du bruit en nous souvenant de sa définition physique : « le bruit est la somme d'une infinité de tensions irrégulières qui se produisent au hasard au cours du temps », que nous allons appliquer au bruit moyenne fréquence :



Le bruit se présente comme la modulation en amplitude de deux tensions en quadrature, « projections » des multiples sources de bruit elles-mêmes de la forme :

$$n_i = \rho_i \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) = \alpha_i.\cos(\omega t) + \beta_i \cos(\omega t + \pi / 2)$$

Nous l'écrirons donc sous la forme :

$$n(t) = \alpha(t)\cos(\omega t) + \beta(t)\cos(\omega t + \pi/2)$$

$\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont alors la somme algébrique à un instant « t » donné d'une infinité de tensions infinitésimales qui se produisent de manière aléatoire dans le temps. Nous en déduirons deux propriétés fondamentales :

La rapidité de variation de $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ est caractéristique de la cadence d'apparition des tensions élémentaires donc du spectre du bruit. Pour un bruit donné, une réduction de la largeur de spectre, sélectionne les tensions le composant en fonction de leur cadence moyenne d'apparition, ce qui est en corrélation avec la loi physique $B = b.\Delta F$, et diminue la rapidité de variation de leur somme.

α et β étant la somme d'une infinité de variables aléatoires, suivent en probabilité une loi de Gauss (cf. 6.3) que nous supposerons (des tensions négatives ayant à priori autant de chance de se produire que des tensions positives) de moyenne nulle. La répartition des tensions aléatoires entre α et β n'a en moyenne aucune raison d'être dissymétrique, nous écrirons donc que α et β ont le même écart type σ et pourrons définir α et β par leurs lois de probabilité :

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha^2/2\sigma^2} \quad , \quad f(\beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\beta^2/2\sigma^2}$$

Nous terminerons en disant que α et β sont des variables aléatoires indépendantes.

En conclusion,

le bruit en moyenne fréquence peut s'écrire sous la forme :

$$n(t) = \alpha(t)\cos(\omega t) + \beta(t)\cos(\omega t + \pi/2)$$

dans laquelle α et β sont deux fonctions aléatoires gaussiennes, de valeur moyenne nulle et d'écart type σ, indépendantes l'une de l'autre.

10.3 PUISSANCE DU BRUIT EN MOYENNE FREQUENCE

Soit à calculer :

$$B = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T n(t)^2 \cdot dt$$

$$B = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left[\int_0^T \alpha^2 \cdot \cos^2\omega t \cdot dt \int_0^T \beta^2 \cdot \sin^2\omega t \cdot dt + 2\int_0^T \alpha\beta \cdot \sin\omega t \cdot \cos\omega t \cdot dt \right]$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

La dernière intégrale est nulle sur un temps infini à cause de la présence du terme $2\sin\omega t.\cos\omega t = \sin 2\omega t$ qui est impair comme α et β d'ailleurs. De même :

$$\cos^2\omega t = \frac{1+\cos(2\omega t)}{2} \qquad \sin^2\omega t = \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}$$

amènent deux termes de valeur moyenne nulle. Il reste :

$$B = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\int_0^T \frac{\alpha^2(t)}{2}\cdot dt + \int_0^T \frac{\beta^2(t)}{2}\cdot dt \right]$$

et d'après le principe ergodique :

$$B = \frac{E(\alpha)^2}{2} + \frac{E(\beta)^2}{2}$$

Nous savons que :

$$E(\alpha^2) = E(\beta^2) = \sigma^2$$

ce qui permet d'écrire :

$$B = \sigma^2$$

Cette valeur est à rapprocher de la relation physique :

$$B = \int_0^\infty b(f)\cdot df$$

Nous retiendrons finalement que chaque composante du bruit MF a pour variance :

$$\boxed{B = \sigma^2 = \int_0^\infty b(f)\cdot df}$$

- σ : écart type de a ou b
- b(f) : densité spectrale
- B : puissance du bruit MF

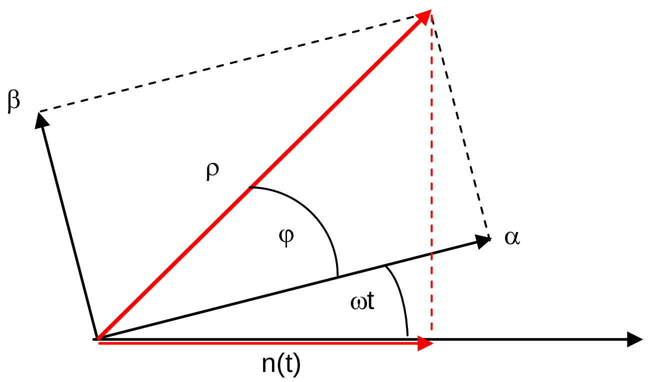
10.4 LE BRUIT EN VIDEOFREQUENCE

a - Représentation vectorielle du bruit moyenne fréquence

Nous pouvons appliquer au bruit moyenne fréquence la représentation de Fresnel. Les deux expressions du bruit MF :

$$n(t) = \rho(t)\cos(\omega t + \varphi(t)) = \alpha(t)\cos(\omega t) + \beta(t)\cos(\omega t + \pi/2)$$

amènent la représentation ci-après.



ISBN : 978-2-9544675-1-1

Le passage du bruit en vidéofréquence pourra se faire soit à l'aide d'une détection soit à l'aide d'une démodulation.

b - Détection quadratique

Le détecteur couramment utilisé est le détecteur à diode qui restitue l'enveloppe du signal moyenne fréquence appliqué à son entrée, ou plus exactement une fonction de cette enveloppe, dépendant de la courbure de la caractéristique du détecteur.

Le détecteur quadratique prend à chaque instant le carré du module de la tension moyenne fréquence appliquée à son entrée. Soit dans le cas du bruit :

$$Z(t) = \rho^2(t) = \alpha^2(t) + \beta^2(t)$$

C'est la loi de la somme du carré de deux variables gaussiennes d'écart type σ^2. Reportons-nous au paragraphe 8.2.3-c, pour trouver la loi de probabilité de la variable Z, nous avons :

$$f(z) = \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \exp\left\{-\frac{z}{2\sigma^2}\right\}$$

La valeur moyenne de la variable Z est alors d'après 6.4

$$E(Z) = m = 2\sigma^2$$

Après passage dans un détecteur quadratique, le bruit devient une fonction aléatoire du temps $Z(t)$ suivant une loi de Laplace

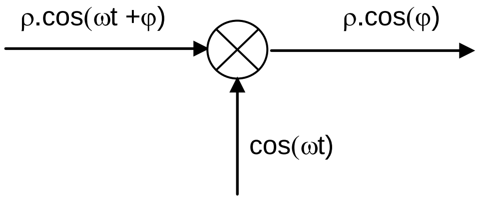
$$\boxed{f(z) = \frac{1}{m} \cdot \exp\left\{-\frac{z}{m}\right\}}$$

dans laquelle $m = 2\sigma^2 = 2B$ égale deux fois la puissance moyenne du bruit en moyenne fréquence.

c - Démodulation

On peut également aboutir à un signal vidéo par transposition de fréquence, ce type de détection est connu sous le titre de **détection cohérente ou démodulation**.

Le schéma de la détection est alors le suivant :



Le démodulateur prélève la composante du signal moyenne fréquence en phase avec le signal de démodulation. Dans le cas du bruit, nous aurons donc :

$$b_s(t) = \rho \cdot \cos(\varphi) = \alpha$$

dont la loi de probabilité est celle définie au paragraphe 10.2 soit :

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}}\, e^{-\alpha^2/2\sigma^2}$$

α a alors une valeur moyenne nulle et un écart type σ.

ISBN : 978-2-9544675-1-1

Après passage dans un démodulateur, le bruit se ramène à sa composante $\alpha(t)$ qui suit une loi de Gauss :

$$\boxed{f(\alpha) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha^2/2\sigma^2}}$$

sa variance, ou puissance moyenne est alors $\sigma^2 = B$ puissance moyenne du bruit en moyenne fréquence.

11 DETECTION D'UN SIGNAL STABLE DANS UN BRUIT

Au cours de son traitement dans une chaîne de réception de radar, le signal reçu est mélangé au bruit. Le signal composite ainsi formé est amplifié, filtré puis détecté, afin d'être mis sous la forme la plus propre à son exploitation ultérieure.

Avant filtrage le rapport S/B n'est pas optimisé, le signal se trouve donc généralement noyé dans le bruit.

Le filtrage a pour but d'optimiser le rapport S/B ce qui permet de faire ressortir le signal, on se trouve donc en présence :

- dans les zones ou aucun signal n'est présent d'un bruit de puissance moyenne B comme défini au paragraphe 10,
- dans les zones où ce signal existe, d'un signal composite formé par la somme du même bruit et du signal utile de puissance maximale $P_{cmax} = S$ (qui dépend du filtrage effectué).

Nous étudierons dans ce paragraphe, le cas où S est une constante quel que soit l'instant de la détection, c'est-à-dire dans le cas où la puissance renvoyée par la cible est constante d'un écho radar au suivant. Cette étude sera menée dans les deux cas suivants :

En absence de signal utile, le bruit détecté peut dépasser le seuil, ce qui crée une fausse alarme. Nous étudierons la probabilité d'apparition de cet événement ou **probabilité de fausse alarme**, connaissant la loi de probabilité du bruit et le niveau du seuil.

En pratique, on connaît la probabilité de fausse alarme que peut tolérer le système de traitement de l'information associé au radar, ce critère permet donc de fixer le niveau du seuil placé après le détecteur.

En présence de signal utile, le signal composite dépasse ou non le seuil suivant la force du signal utile et suivant la manière dont il se compose en moyenne fréquence avec le bruit qui l'accompagne.

La détection de la présence d'une cible n'est donc pas un fait certain, mais une variable aléatoire. Nous étudierons la **probabilité de détection,** probabilité pour que le signal composite dépasse le seuil qui, à probabilité de fausse alarme donnée, dépendra essentiellement du rapport S/B.

11.1 CALCUL DE LA PROBABILITE DE FAUSSE ALARME

a - Détecteur quadratique

À la sortie du détecteur quadratique, le bruit suit une loi de Laplace :

$$f_{(z)} = \frac{1}{m} e^{-\frac{z}{m}}$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

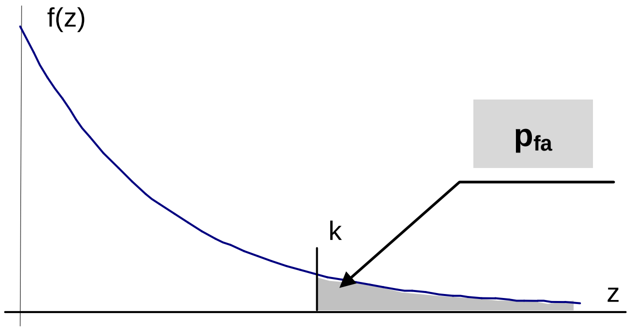
Nous **normerons le signal et le bruit** à la sortie du détecteur en posant :

$$\boxed{m = 2\sigma^2 = 1}$$

ce qui amènera à écrire pour le signal en moyenne fréquence :

$$\frac{S}{B} = \frac{A^2}{2\sigma^2} = A^2$$

Soit k l'amplitude du seuil auquel on compare le bruit détecté *Z*.



La probabilité de fausse alarme sera la probabilité pour que la variable aléatoire Z dépasse le seuil k

$$p_{fa} = P\{Z > k\}$$

$$p_{fa} = \int_{k}^{\infty} e^{-z} dz$$

$$\boxed{p_{fa} = e^{-k} \Rightarrow k = -\ln(pfa)}$$

b - Détecteur cohérent ou démodulateur

À la sortie du démodulateur le bruit suit une loi de Gauss :

$$h(\alpha) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}}$$

Nous poserons dans ce cas :

$$\boxed{\sigma^2 = 1}$$

ce qui entraînera pour le signal en moyenne fréquence :

$$S/B = \frac{A^2}{2\sigma^2} = \frac{A^2}{2}$$

pour aboutir à la forme réduite de la loi de Gauss unitaire :

$$h(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha^2/2}$$

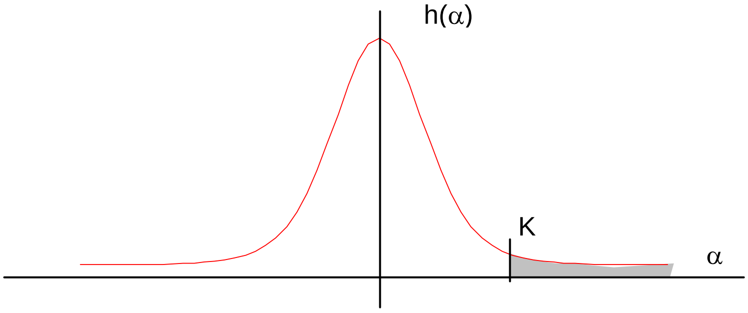
Soit K l'amplitude du seuil de comparaison, nous pouvons écrire :

$$p_{fa} = P\{\alpha > K\}$$

soit :

ISBN : 978-2-9544675-1-1

$$\boxed{p_{fa} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{K}^{\infty} e^{-\alpha^2/2}\, d\alpha}$$



ce qui est la relation du récepteur idéal donnée par Monsieur MH CARPENTIER dans son ouvrage « *Radars bases modernes* » paragraphe 3.3.1.

On peut relier pf_a à K par utilisation des tables de la loi de Gauss unitaire, ce qui permet d'obtenir le tableau suivant :

p_{fa}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}
K	2,4	3,1	3,7	4,25	4,7	5,15	5,55	6	6,3

Il reste maintenant à étudier comment le signal et le bruit se composent en moyenne fréquence et l'effet des différents types de détecteurs sur le signal composite ainsi formé, ce que nous allons faire dans les paragraphes suivants.

11.2 SUPERPOSITION DU SIGNAL ET DU BRUIT EN MOYENNE FREQUENCE

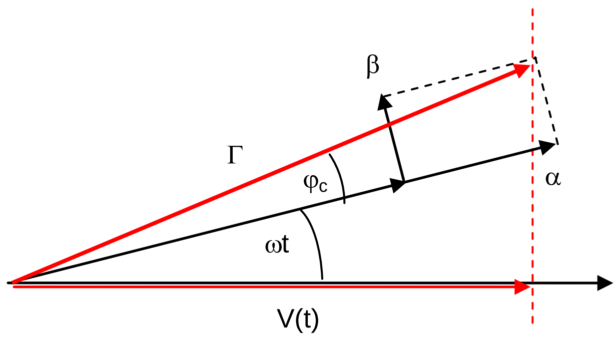
Le signal étant considéré comme stable, nous le choisirons comme origine des phases et écrirons :

$$S(t) = A\cos\omega t$$

Le bruit superposé au signal est alors donné par la relation :

$$n_{(t)} = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$$

Le signal composite, somme du signal utile et du bruit, est représenté dans le plan de Fresnel sur le schéma ci-après :



Le signal composite a pour expression :

$$V_{(t)} = \Gamma \cdot \cos(\omega t + \varphi_c)$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

Γ et φ sont des variables aléatoires puisque α et β le sont.

- le détecteur quadratique verra à sa sortie Γ^2 carré du module du signal composite
- le démodulateur $\Gamma \cos(\varphi_c)$, *si la référence de démodulation est supposée en phase avec le signal utile*.

Dans ce qui va suivra, nous allons étudier la probabilité de détection qui s'écrira :

$$P_d = P\{\ \Gamma^2 > k\ \}, \text{ pour le détecteur quadratique}$$

$$P_d = P\{\ \Gamma.\cos(\varphi_c) > K\ \}, \text{ pour le démodulateur}$$

11.3 PROBABILITE DE DETECTION APRES DETECTEUR QUADRATIQUE

En nous reportant au paragraphe 11.2, nous pouvons écrire :

$$\Gamma^2 = (A + \alpha)^2 + \beta^2$$

La loi de probabilité de Γ^2 n'est pas facilement calculable, nous l'approximerons, pour A grand, en remplaçant β^2, par sa valeur moyenne, pour tenir compte globalement de son effet.

On écrira donc :

$$\beta^2 \approx E(\beta^2) = \sigma^2 = \frac{1}{2}$$

$$p_d = P\left\{(A+\alpha)^2 + 0{,}5 > k\right\}$$

Ou, en négligeant la probabilité pour que $A + \alpha < -(k - 0{,}5)^{0{,}5}$:

$$p_d = P\left\{A + \alpha > \sqrt{k - 0{,}5}\right\}$$

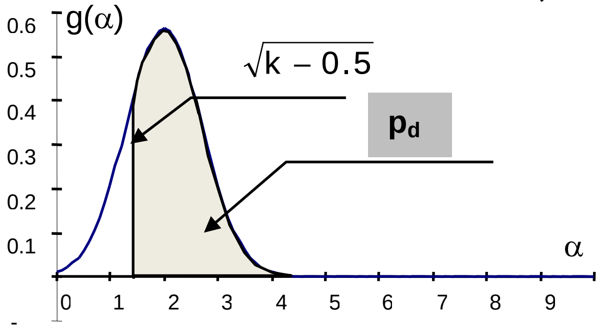
$$p_d = P\left\{\alpha + \sqrt{k - 0{,}5} - A\right\}$$

Or α est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance :σ^2 = B. Ici avec la norme choisie pour le bruit $m = 2\sigma^2 = 1$, $\sigma^2 = 0{,}5$. On peut donc écrire sa densité de probabilité :

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ e^{-\alpha^2}$$

donc : $x = A + \alpha$ a pour moyenne A et pour variance 0.5 :

$$g_{(x)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ e^{-(x-A)^2}$$



D'où la probabilité de détection

$$p_d = \int_{\sqrt{k}-0.5}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ e^{-(x-A)^2} dx$$

ISBN : 978-2-9544675-1-1

Ramenons-nous à la forme réduite en posant :

$$y=\sqrt{2}(x-A)\ ;\ (x-A)^2=\frac{y^2}{2}\ ;\ dx=\frac{dy}{\sqrt{2}}$$

il vient :

$$p_d=\int_{\sqrt{2}(\sqrt{.k-0,5}-A)}^{.\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\int_{-.t}^{.\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

avec :

$$\sqrt{k-0,5}-A=-\frac{t}{\sqrt{2}}$$

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}}(t+\sqrt{2k-1})$$

$$\boxed{S/B=\frac{1}{2}(t+\sqrt{2k-1})^2}$$

La relation entre p_d et t est donnée par le tableau suivant extrait des tables de la loi de Gauss :

p_d	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
t	–1,28	–0,84	–0,53	–0,26	0	0,26	0,53	0,84	1,28	1,65	2,33

on peut ainsi calculer le rapport signal sur bruit à pf_a, (k) et p_d, (t) donnés.

NOTA

Une autre approximation consiste à négliger β^2 dans le calcul. Elle conduit à l'expression :

$$S/B=(\frac{t}{\sqrt{2}}+\sqrt{k})^2$$

11.4 PROBABILITE DE DETECTION APRES DEMODULATEUR

La démodulation prélève la composante du signal moyenne fréquence en phase avec le signal de référence. Elle n'est donc adaptée au signal utile que si ce signal est en phase avec elle.

*Cette condition, qui pour être réalisée suppose connu exactement le temps de trajet aller et retour afin de pouvoir caler exactement la phase de la référence sur le signal reçu. C'*est une des conditions qui doit être réalisée dans le cas théorique du « **Récepteur idéal** ». Nous retrouverons ce concept dans le chapitre 23.

Les conditions de mise en phase du signal utile et de la référence étant supposées remplies, les signaux rentrant dans le démodulateur seront :

- sur la voie signal : $(A+\alpha)\cdot\cos\omega t+\beta\cdot\cos(\omega t+\pi/2)$
- sur la voie référence : $\cos\omega t$

Le signal en sortie du démodulateur, après élimination des harmoniques, sera donc :

$$V(t)=A+\alpha=\Gamma\cdot\cos\varphi_c$$

et la probabilité de détection sera donc :

$$p_d=P\{A+\alpha>K\}$$

soit :

ISBN : 978-2-9544675-1-1

$$p_d = P\{\alpha > K - A\}$$

en nous référant au paragraphe 11.1-c, nous avons :

$$S/B = \frac{A^2}{2} \;;\; A = \sqrt{2 \cdot S/B}$$

$$h(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha^2/2}$$

on a donc :

$$\boxed{p_d = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{K-\sqrt{2 \cdot S/B}}^{\infty} e^{-\alpha^2/2} \, d\alpha}$$

ce qui est la relation établie dans le cas du récepteur idéal par Monsieur MH CARPENTIER dans son ouvrage « *Radar bases modernes* » paragraphe 3.3.2 en posant

$$R = 2\ S/B = 2\ E/b$$

Les valeurs de K sont celles définies au paragraphe 11.1.2.

On peut relier S/B au paramètre t en posant comme dans le paragraphe 11.3 :

$$-t = K - \sqrt{2S/B}$$

on aura alors :

$$\boxed{S/B = \frac{1}{2}(t+K)^2}$$

11.5 REMARQUES ET CONCLUSIONS

Les courbes de probabilité de détection en fonction de S/B ont été comparées avec différentes références.

Celles correspondant à la loi simplifiée après détection quadratique (soit en négligeant β^2) coïncident à 0,1 dB près avec celles données dans l'ouvrage de Monsieur SKOLNIK *(« Introduction to Radar System »)* qui ont été vraisemblablement calculées dans cette hypothèse.

Nous leur préférons celles établies avec la loi corrigée (soit remplacer β^2 par sa valeur moyenne) qui, dans le domaine des cas d'utilisation pratique, donnent une meilleure représentation de la réalité.

Il reste maintenant à comparer ces dernières courbes avec celles établies dans le cas du récepteur idéal.

La perte de rapport signal sur bruit à probabilité de détection égale est en moyenne :

- de 1 dB pour $pf_a = 10^{-3}$
- de 0,6 dB pour $pf_a = 10^{-5}$
- de 0,4 dB pour $pf_a = 10^{-10}$

Par contre, la réalisation pratique du récepteur idéal exige la parfaite connaissance de la phase du signal reçu, ce qui n'est jamais le cas en radar.

Dans la pratique, le dernier étage du radar se terminera par un détecteur et non par un démodulateur.

ISBN : 978-2-9544675-1-1

En conclusion, nous retiendrons les relations suivantes établies dans le cas du détecteur :

$$\boxed{S/B = \frac{1}{2}\left(t + \sqrt{2k-1}\right)^2}$$

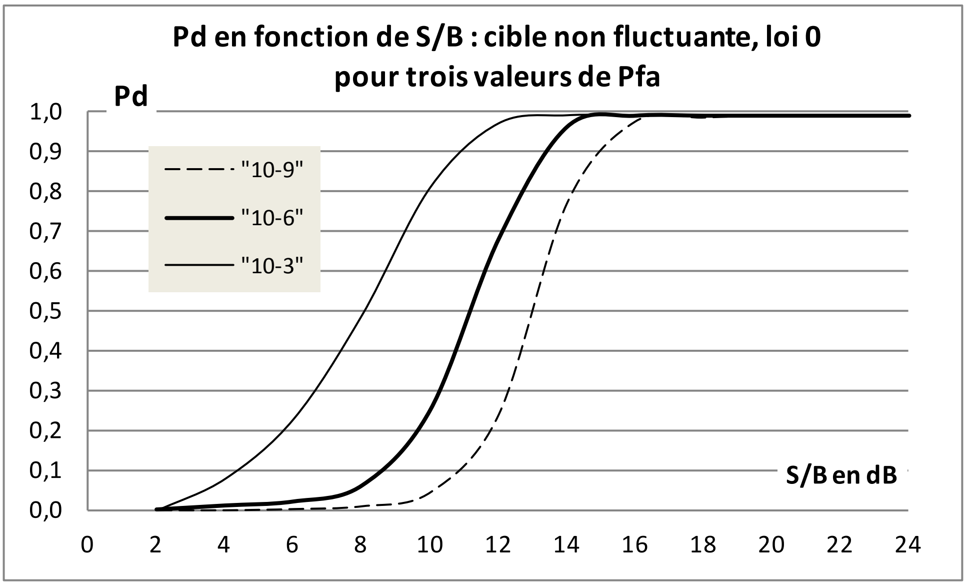
Avec : $k = -\ln(p_{fa})$; et « t » chiffré dans la table suivante :

p_d	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
t	–1,28	–0,84	–0,53	–0,26	0	0,26	0,53	0,84	1,28	1,65	2,33

Tableau 1 : Loi 0 - Cible non fluctuante

$(S/B)_1$ un écho – par plot, en fonction de p_d et p_{fa}, en dB

p_{fa} \ p_d	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
10^{-1}					1,3	2,5	3,8	4,7	5,8	7,1	8	9,5
10^{-2}		1	3,1	4,3	5,3	6,1	6,9	7,6	8,4	9,3	10,1	11,3
10^{-3}	2,7	4,2	5,7	6,7	7,4	8,1	8,7	9,3	9,9	10,7	11,4	12,4
10^{-4}	5,0	6,2	7,4	8,2	8,8	9,4	9,9	10,4	11,0	11,7	12,3	13,2
10^{-5}	6,6	7,6	8,7	9,4	9,9	10,4	10,8	11,3	11,8	12,5	13,0	13,9
10^{-6}	7,9	8,8	9,7	10,3	10,8	11,2	11,7	12,1	12,6	13,2	13,7	14,5
10^{-7}	8,9	9,7	10,5	11,1	11,5	11,9	12,3	12,7	13,2	13,7	14,2	15,0
10^{-8}	9,9	10,4	11,2	11,7	12,1	12,5	12,9	13,3	13,7	14,2	14,6	15,4
10^{-9}	10,5	11,1	11,8	12,3	12,7	13,1	13,4	13,8	14,1	14,7	15,1	15,8
10^{-10}	10,8	11,7	12,3	12,8	13,2	13,6	13,8	14,2	14,5	15,0	15,4	16,1
10^{-11}	11,6	12,2	12,8	13,3	13,6	13,9	14,3	14,6	14,9	15,4	15,8	16,4
10^{-12}	12,1	12,7	13,3	13,7	14,0	14,3	14,6	14,9	15,3	15,7	16,1	16,7



ISBN : 978-2-9544675-1-1