

CHAPITRE 23 - THEORIE DE LA DETECTION OPTIMALE

1	PRELIMINAIRE.....	2
2	PROBLEME DE LA DETECTION DU SIGNAL RADAR.....	2
3	PROBABILITE A PRIORI ET A POSTERIORI.....	3
3.1	PROBABILITES COMPOSEES ET CONDITIONNELLES.....	3
3.2	APPLICATION AUX « PROBABILITES A POSTERIORI».....	4
3.2.1	Théorie.....	4
3.2.2	Exemple.....	5
4	DETECTION D'UN SIGNAL REEL DANS UN BRUIT GAUSSIEN.....	6
4.1	SIGNAL FORME D'UN SEUL ECHANTILLON.....	6
4.1.1	Théorie.....	6
4.1.2	Exemples.....	6
4.2	SIGNAL COMPORTANT PLUSIEURS ECHANTILLONS.....	7
4.3	INFLUENCE DE LA NON CONNAISSANCE DE LA POSITION DU SIGNAL.....	8
4.3.1	Etude du problème.....	8
4.3.2	Simplification du critère de maximum de vraisemblance.....	11
4.4	CAS DES SIGNAUX REELS CONTINUS.....	12
4.4.1	Etablissement du critère de détection.....	12
4.4.2	Signal d'amplitude connue.....	13
4.4.3	Signal d'amplitude inconnue.....	14
5	DETECTION DES SIGNAUX COMPLEXES. APPLICATION AU RADAR.....	16
5.1	PRELIMINAIRE.....	16
5.2	ETABLISSEMENT DU CRITERE DE DETECTION.....	16
5.2.1	Cas général.....	16
5.2.2	Cas où le signal de référence est d'énergie unitaire.....	18
6	RECEPTION OPTIMALE EN BRUIT COLORE.....	19
6.1	ETABLISSEMENT DU CRITERE DE DETECTION.....	19
6.2	CALCUL DES FONCTIONS « Γ » ET « χ ».....	20
6.2.1	Recherche d'une base pour les signaux étudiés (Cf. Chapitre 19-3 § 5.3).....	20
6.2.2	Condition pour que la base soit représentative de $N(t)$	21
6.2.3	Application au calcul des fonctions « Γ » et « χ ».....	22
6.3	CAS D'UN BRUIT BLANC.....	22
6.4	CAS D'UN BRUIT COLORE.....	23
6.4.1	Etablissement des conditions de détection.....	23
6.4.2	1 ^{er} interprétation spectrale des résultats, filtre « superblanchissant ».....	24
6.4.3	2 ^{ème} interprétation spectrale des résultats, filtre « blanchissant ».....	25

1 PRELIMINAIRE

Dans l'approche physique exposée au **chapitre 17**, amenant à la notion de récepteur optimal, nous avons tenu le raisonnement suivant :

1. Le traitement ou filtrage du signal a pour but d'assurer la meilleure visibilité du signal dans le bruit et les autres signaux parasites.
2. Ce traitement est suivi d'une détection et d'un seuil. Seuls les signaux dépassant ce seuil sont pris en compte dans l'exploitation.
3. La qualité de détection radar se résume à deux paramètres essentiels :
4. La possibilité que le signal en présence de bruit, n'atteigne pas le seuil, ce qui limite la : **Probabilité de détection P_d**
5. La possibilité pour le bruit seul, de créer de faux échos qui dépassent le seuil qui se caractérise par la : **Probabilité de fausse alarme P_{fa}**
6. A probabilité de fausse alarme donnée, il convient de rechercher la meilleure probabilité de détection possible.

Cela suppose un seuil suffisamment élevé pour bien filtrer le bruit et un signal suffisamment fort par rapport au seuil, donc au bruit, pour être décelé.

On a ainsi défini *un filtre optimal* comme un *filtre maximisant le rapport* :

$$\frac{S}{B} = \frac{\text{Puissance crête du signal après filtrage}}{\text{Puissance moyenne du bruit après filtrage}}$$

Le filtre adapté ou optimal est, selon cette approche, celui qui permet d'obtenir le meilleur rapport signal sur bruit après filtrage, pour des conditions d'entrée données.

Dans ce qui va suivre, nous aborderons directement la notion de « *détection optimale* » en nous *intéressant directement à la probabilité de détecter un signal dans un bruit*, sans passer par l'intermédiaire des puissances observées. Cela nous mène à reposer le problème de la détection du signal radar de manière plus générale

La méthode utilisée pour établir cette théorie générale est inspirée des principes exposés dans l'ouvrage de Monsieur Michel CARPENTIER au chapitre 2 de son ouvrage : « Radar bases modernes » MASSON 1984, pour des bruits et signaux réels, principes qui seront étendus dans ce chapitre aux bruits et signaux complexes.

2 PROBLEME DE LA DETECTION DU SIGNAL RADAR

Le radar est, par définition, un dispositif destiné à assurer les fonctions de **RA**dio **D**etection **A**nd **R**anging, soit:

- observer un espace déterminé ;
- établir si dans un domaine appartenant à l'espace observé, il y a ou non un objet.

Les données disponibles sont:

- la connaissance du signal émis $Z(t)$;
- la connaissance de l'effet de la propagation :
 - atténuation et déphasage du signal : Γ ,
 - retard: t_0 ,
 - glissement de fréquence doppler : f_D .

Ceci donne une certaine connaissance a priori du signal reçu :

$$s(t, \theta) = \Gamma \cdot Z(t - t_0) \cdot \exp\{j2\pi f_D t\}$$

Le signal reçu est la somme d'un bruit gaussien complexe $N(t)$, présent en permanence, et de ce signal, lorsqu'il est présent, à l'endroit de la cible observée.

$$z(t) = k \cdot s(t, \theta) + N(t)$$

avec $k = 1$ s'il y a signal et 0 dans le cas contraire.

Le problème à résoudre sera alors, après observation d'un échantillon de $z(t)$, de répondre à la double question :

- *quelle est la probabilité pour que $z(t)$ contienne le signal utile,*
- *quelles sont les valeurs les plus probables de t_0 et de f_D .*

Cette étude sera menée en faisant appel aux notions de probabilités a priori et a posteriori après observation du signal $z(t)$, que nous définirons au préalable.

Il y apparaîtra que la « **détection optimale** » fait appel à un **critère de maximum de vraisemblance**.

Dans un premier temps, on se placera dans le cas d'un signal vidéofréquence réel ayant subi un retard « t_0 » et on écrira :

$$y(t) = k \cdot s(t - t_0) + n(t)$$

On généralisera ensuite ce critère aux signaux radar, ce qui amènera à définir la structure du récepteur réalisant cette détection optimale.

3 PROBABILITE A PRIORI ET A POSTERIORI

3.1 PROBABILITES COMPOSEES ET CONDITIONNELLES

Soit une population de « n » objets comprenant :

- $n(a)$ objets présentant le caractère "a",
- $n(b)$ objets présentant le caractère "b",
- $n(a,b)$ objets présentant simultanément les caractères "a" et "b".

On notera que : $n = n(a) + n(b) - n(a,b)$.

La probabilité de rencontrer un objet "ab" est :

$$P(a \& b) = P(a,b) = \frac{n(ab)}{n}$$

Elle peut s'écrire :

$$P(a,b) = \frac{n(a,b)}{n(a)} \cdot \frac{n(a)}{n} = P(b/a), P(a)$$

$P(b/a)$ (lire : $P(b$ si $a)$), représente dans la population des objets possédant la caractéristique « a », la proportion de ceux possédant la caractéristique « b ». C'est la **probabilité conditionnelle** de "b" si "a" existe, elle tient compte du fait que, si un événement a été observé, il définit une nouvelle population, ou une nouvelle règle du jeu pour l'apparition d'un autre événement.

Ce phénomène existe aussi si le caractère "b" est révélé en premier, le raisonnement précédent ne supposant pas un ordre particulier.

On écrira donc :

$$P(a,b) = P(a), P(b/a) = P(b) \cdot P(a/b)$$

Expression connue sous le nom de **théorème des probabilités composées**.

3.2 APPLICATION AUX « PROBABILITES A POSTERIORI »

3.2.1 Théorie

Soient **deux événements incompatibles** "a" et "b" dont les probabilités a priori sont respectivement $P_0(a)$ et $P_0(b)$, et un événement "y" observable et dont on connaît les probabilités d'apparition dans les cas "a" et "b".

Si "y" prend une valeur particulière « y_1 », on saura donc définir $P(y_1/a)$ et $P(y_1/b)$

On peut alors écrire:

$$P(y_1,a) = P_0(a) \cdot P(y_1/a) = P(y_1) \cdot P(a/y_1)$$

$$P(y_1,b) = P_0(b) \cdot P(y_1/b) = P(y_1) \cdot P(b/y_1)$$

expressions dans lesquelles $P(y_1)$ n'est pas forcément connu a priori.

$P(a/y_1)$ est la probabilité pour que "a" se produise si l'événement « y_1 », a été observé, c'est donc la probabilité a posteriori des réalisations de l'événement "a" dans le cas où « y_1 » est apparu. Nous l'écrivons :

$$P(a/y_1) = P_1(a)$$

ce qui entraîne :

$$P_1(a) = \frac{P_0(a) \cdot P(a/y_1)}{P(y_1)}$$

$$P_1(b) = \frac{P_0(b) \cdot P(b/y_1)}{P(y_1)}$$

$P(y_1)$ n'est pas connu, mais par contre on sait que seuls « a » et « b », qui sont incompatibles, peuvent se produire, d'où les trois équations :

$$P_1(a) + P_1(b) = 1$$

$$P_1(a) = k_1 P_0(a) \cdot P(y_1/a)$$

$$P_1(b) = k_1 P_0(b) \cdot P(y_1/b)$$

qui sont suffisantes pour calculer les deux **probabilités a posteriori** $P_1(a)$ et $P_1(b)$, des événements « a » et « b », après avoir observé l'événement « y_1 ». On peut recommencer plusieurs fois l'expérience pour passer des P_1 aux P_2 , des P_2 aux P_3 et ainsi de suite, pour aboutir **au bout de « n » observations** à:

$$P_n(a) = k \cdot P_0(a) \cdot \prod_{i=1}^n P(y_i/a)$$

$$P_n(b) = k \cdot P_0(b) \cdot \prod_{i=1}^n P(y_i/b)$$

Avec

$$P_n(a) + P_n(b) = 1$$

et aboutir aux **probabilités a posteriori** $P_n(a)$ et $P_n(b)$, d'apparition des évènements « a » et « b », si on a observé successivement « n » évènements « y_1 » « y_2 » « y_n ».

3.2.2 Exemple

On dispose de deux jeux de cartes l'un "a" complet l'autre "b" ne contenant que les piques et les trèfles.

On tire au hasard une carte de l'un des deux paquets et on constate que c'est un pique. on recommence avec le même paquet après remise de la carte précédente (tirage non exhaustif) et on constate à nouveau que c'est un pique.

Quelle est la probabilité que l'on ait choisi le paquet "b".

On connaît:

- $P_0(a) = 0,5$
- $P_0(b) = 0,5$
- $P(\text{pique}/a) = 0,25$
- $P(\text{pique}/b) = 0,5$

Après le premier tirage :

$$P_1(a) = k_1 \cdot 1/2 \cdot 1/4 = k_1/8$$

$$P_1(b) = k_1 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = k_1/4$$

$$k_1/4 + k_1/8 = 1$$

$$k_1 = 8/3$$

$$P_1(a) = 1/3$$

$$P_1(b) = 2/3$$

Après le second tirage:

$$P_2(a) = k_2 \cdot 1/3 \cdot 1/4 = k_2/12$$

$$P_2(b) = k_2 \cdot 2/3 \cdot 1/2 = k_2 \cdot 4/12$$

$$k_2/12 + k_2 \cdot 5/12 = 1$$

$$k_2 = 12/5$$

$$P_2(a) = 1/5$$

$$P_2(b) = 4/5$$

Cet exemple illustre bien la croissance de la probabilité a posteriori, ou de la présomption, de tirer le paquet "b" lorsque l'on sort une carte noire¹...

On retiendra finalement que l'observation a permis d'enrichir l'information que l'on avait a priori.

¹ Ici le tirage d'une carte rouge donnerait automatiquement la certitude du paquet "a", puisque $P(\text{rouge}/b) = 0$

4 DETECTION D'UN SIGNAL REEL DANS UN BRUIT GAUSSIEN

4.1 SIGNAL FORME D'UN SEUL ECHANTILLON

4.1.1 Théorie

On se place dans le cas particulier d'un signal dont on connaît a priori l'amplitude V et la phase (que l'on prendra égale à zéro) accompagné d'un bruit « $n(t)$ », de puissance moyenne B , suivant une loi de Gauss.

Soit une « fenêtre » où le signal a « a priori » une chance sur deux d'apparaître, ce qui permet d'écrire :

$$P_0(V) = 0,5 \quad ; \quad P_0(0) = 0,5$$

Le signal composite $y(t)$ a pour expression :

$$y(t) = k \cdot V + n(t)$$

Il suit une loi de Gauss, de variance B , de moyenne zéro en absence de signal et V en présence du signal. La probabilité pour que ce signal prenne une valeur particulière « y », est alors :

- **en l'absence du signal** : valeur moyenne nulle ($k = 0$)

$$P(y_1/0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi B}} \cdot \exp\left\{-\frac{y_1^2}{2B}\right\} \delta y$$

- **en présence du signal** : valeur moyenne égale à V ($k=1$)

$$P(y_1/V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi B}} \cdot \exp\left\{-\frac{(y_1 - V)^2}{2B}\right\} \delta y$$

« δy », fenêtre d'observation du signal continu « y » (entre y_1 et $y_1 + \delta y$) est une valeur finie, identique dans les deux cas d'observation. On pourra donc écrire après une observation :

$$P_1(V) = k_1 \cdot P_0(V) \cdot \exp\left\{-\frac{(y_1 - V)^2}{2B}\right\}$$

$$P_1(0) = k_1 \cdot P_0(0) \cdot \exp\left\{-\frac{y_1^2}{2B}\right\}$$

$$P_1(V) + P_1(0) = 1$$

4.1.2 Exemples

Le signal est effectivement présent et on considère trois cas :

- a $B = V^2$; $y_1 = 2V$; (donc $n_1 = V$) :

$$P_1(V) = k_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\right\} = 0,303 \cdot k_1$$

$$P_1(0) = k_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \exp\{-2\} = 0,068 \cdot k_1$$

$$k_1 = 1/0,371 \Rightarrow P_1(V) = 0,82 \Rightarrow P_1(0) = 0,18$$

b $B = V^2 ; y_1 = V ; (\text{donc } n_1=0) :$

$$P_1(v) = k_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \exp\{-0\} = 0,5 \cdot k_1$$

$$P_1(0) = k_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\right\} = 0,303 \cdot k_1$$

$$k_1 = 1/0,803 \Rightarrow P_1(V) = 0,62 \Rightarrow P_1(0) = 0,38$$

c $B = V^2 ; y_1 = 0 ; (\text{donc } n_1=-V) :$

$$P_1(v) = k_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\right\} = 0,303 \cdot k_1$$

$$P_1(0) = k_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \exp\{-0\} = 0,5 \cdot k_1$$

$$k_1 = 1/0,803 \Rightarrow P_1(V) = 0,38 \Rightarrow P_1(0) = 0,62$$

On voit donc que « l'enrichissement » de l'information dépend, c'est évident a posteriori, de l'échantillon observé.

Par ailleurs, il dépend aussi du rapport signal sur bruit. Par exemple, si au lieu de $V^2 = B$ on pose $V^2 = 10 \cdot B$, on trouve dans le second cas ($n_1 = 0$) :

$$P_1(v) = k_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \exp\{-0\} = 0,5 \cdot k_1$$

$$P_1(0) = k_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \exp\left\{-\frac{10}{2}\right\} = 3,4 \cdot 10^{-3} \cdot k_1$$

$$k_1 = 1/0,5034 \Rightarrow P_1(V) = 0,993 \Rightarrow P_1(0) = 0,007$$

4.2 SIGNAL COMPORTANT PLUSIEURS ECHANTILLONS

Dans ce cas, on pourra effectuer sur le signal autant d'observations qu'il existe d'échantillons indépendants. Posons :

$$S = \sum_{i=1}^n V_i$$

La généralisation des résultats du paragraphe 2.2.1 permet d'écrire, après observation des « n » échantillons du signal :

$$P_n(V) = k \cdot P_0(V) \cdot \prod_{i=1}^n P(y_i / V) \Rightarrow P_n(0) = k \cdot P_0(0) \cdot \prod_{i=1}^n P(y_i / 0)$$

Soit avec les lois de probabilité établies ici :

$$P_n(V) = k \cdot P_0(V) \cdot \exp\left\{\sum_{i=1}^n \frac{-(y_i - V_i)^2}{2B}\right\}$$

$$P_n(0) = k \cdot P_0(0) \cdot \exp\left\{\sum_{i=1}^n \frac{-y_i^2}{2B}\right\}$$

$$P_n(V) + P_n(0) = 1$$

L'effet cumulatif des tirages permet alors d'enrichir davantage l'information. Repartons de l'exemple du paragraphe précédent en supposant un signal formé de trois échantillons d'amplitude constante égale à V accompagnés successivement de trois échantillons de bruit :

$$n_1 = V ; n_2 = 0 ; n_3 = -V,$$

Ce qui entraîne :

$$y_1 = 2V ; y_2 = V ; y_3 = 0$$

et

$$y_1 - V_1 = V ; y_2 - V_2 = 0 ; y_3 - V_3 = -V$$

Soit, si $B = V^2$:

$$\sum_1^3 \frac{-(y_i - V_i)^2}{2B} = -\frac{1}{2}(1+0+1) = -1$$

$$\sum_1^3 \frac{y_i^2}{2B} = -\frac{1}{2}(4+1+0) = -\frac{5}{2}$$

$$P_3(S) = k \cdot \frac{1}{2} \cdot \exp\{-1\} = 0,184 \cdot k$$

$$P_3(0) = k \cdot \frac{1}{2} \cdot \exp\left\{-\frac{5}{2}\right\} = 0,041 \cdot k$$

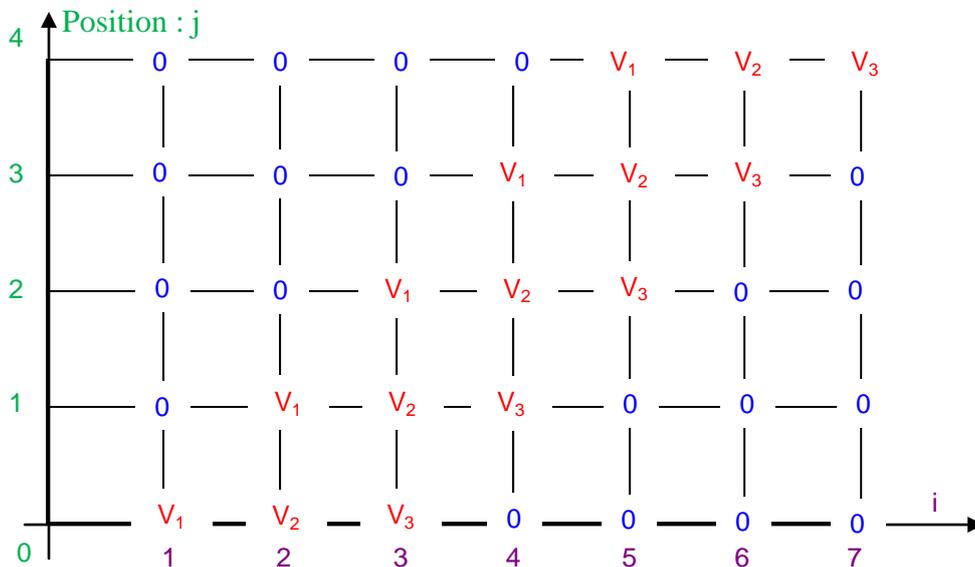
$$k = 1/0,225 \Rightarrow P_3(S) = 0.82 \Rightarrow P_3(0) = 0,18$$

On retrouve ici le meilleur résultat du cas précédent alors que l'un des tirages du bruit est très défavorable. On peut donc constater que l'enrichissement de l'information s'avère amélioré lorsque le signal traité comporte plusieurs échantillons indépendants.

4.3 INFLUENCE DE LA NON CONNAISSANCE DE LA POSITION DU SIGNAL

4.3.1 Etude du problème

Dans le cas du radar, on ne connaît pas a priori la position du signal s'il existe. Il faut alors prendre en compte toutes ses positions possibles.



Soit un signal comportant "n" échantillons et pouvant occuper "p" positions (décalage de la position zéro à la position « p - 1 »), comme figuré ci-avant pour n = 3 et p = 5. L'expression générale d'un tel signal sera :

$$S_j = \sum_{1+j}^{n+j} V_{i-j}$$

Le signal utile occupera les positions 1 + j à n + j.

La séquence totale à analyser comportera : N = n + p - 1 échantillons.

On pourra supposer que la probabilité a priori, pour que le signal occupe l'une quelconque des « p » positions, est constante et égale à :

$$P(S, j) = \frac{P(S)}{p}$$

On peut donc écrire pour une position présumée « j » du signal S :

$$P_N(S, j) = k \cdot P_0(S, j) \cdot \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{-(y_i - V_{i-j})^2}{2B} \right\}$$

$$P_N(0) = k \cdot P_0(0) \cdot \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{-y_i^2}{2B} \right\}$$

$$P_N(0) + \sum_{j=0}^{p-1} P_N(S, j) = 1$$

Des deux premières relations on peut déduire la suivante, en se souvenant que le signal n'est présent que dans l'intervalle [1+j, n+j], donc que le rapport des exponentielles est égal à 1 en dehors de cet intervalle :

$$\frac{P_N(S, j)}{P_N(0)} = \frac{P_0(S, j)}{P_0(0)} \cdot \exp \left\{ \sum_{i=1+j}^{n+j} \frac{-V_{i-j}^2}{2B} \right\} \cdot \exp \left\{ \sum_{i=1+j}^{n+j} \frac{y_i \cdot V_{i-j}}{B} \right\}$$

relation à associer à :

$$P_N(0) + \sum_{j=0}^{p-1} P_N(S, j) = 1$$

Ces deux dernières relations, ainsi que la connaissance des probabilités a priori P₀ et des valeurs des V_j et Y_i, permettent de calculer les P_N.

Reprenons l'exemple déjà utilisé pour un signal pouvant occuper cinq positions et un bruit sur sept échantillons.

i	1	2	3	4	5	6	7
n _i	V	0	-V	V	0	-V	V

On conservera les valeurs :

$$B = V^2 ; V_1 = V_2 = V_3 = V$$

Pour tout signal, quelle que soit sa position :

$$\sum_{i=1+j}^{3+j} \frac{-V_{i-j}^2}{2B} = \sum_1^3 \frac{-V_i^2}{2B} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \exp\left\{-\frac{3}{2}\right\} = 0.223$$

Le signal sera placé en position médiane : j = 2, d'où le tableau :

i	1	2	3	4	5	6	7
n _i	V	0	-V	V	0	-V	V
V _{reçu}	0	0	V	V	V	0	0
Y _i	V	0	0	2V	V	-V	V

On peut également écrire :

$$P_0(0) = 0,5 \quad ; \quad P_0(S,j) = P_0(S)/5 = 0,1$$

soit :

$$\frac{P_N(S,j)}{P_N(0)} = 0,045 \cdot \exp\left\{\sum_{i=1+j}^{n+j} \frac{y_i \cdot V_{i-j}}{B}\right\}$$

Pour chaque position présumée du signal on a alors :

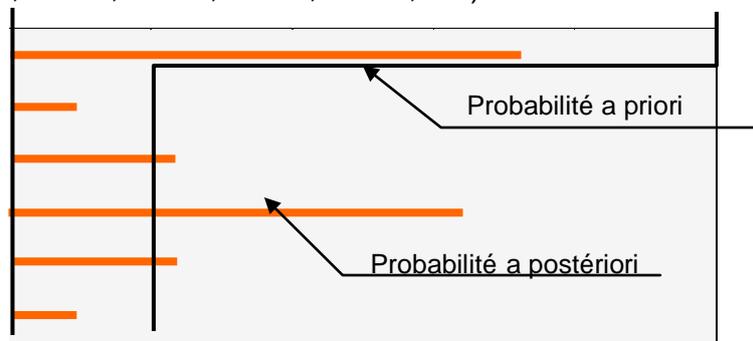
Position : J	$\sum(Y_i \cdot V_{i-j})/V^2$	$P_N(S,j)/P_N(0)$
0	1	0,122
1	2	0,333
2	3	0,904
3	2	0,333
4	1	0,122

On écrit alors :

$$P_N(0) + \sum_{j=0}^{p-1} P_N(S,j) = 1$$

$$P_N(0) \cdot (1 + 0,122 + 0,333 + 0,904 + 0,333 + 0,122) = 1$$

- $P_N(0) = 0,355$
- $P_N(S,0) = 0,043$
- $P_N(S,1) = 0,118$
- $P_N(S,2) = 0,321$
- $P_N(S,3) = 0,118$
- $P_N(S,4) = 0,043$



La probabilité estimée a posteriori pour que le signal se trouve dans la position j = 2, passe de 0,1 à 0,32 soit trois fois plus que la probabilité a priori. Dans le même temps, les probabilités a priori des autres positions sont maintenues ou diminuées, et la probabilité d'absence de signal décroît de 0,5 à 0,35. L'enrichissement de l'information est donc très probant. Il le serait encore davantage pour un signal plus puissant entraînant un rapport signal sur bruit plus élevé.

4.3.2 Simplification du critère de maximum de vraisemblance

Le problème posé était celui de la reconnaissance de la présence d'un signal utile de position quelconque "j" dans un signal composite formé de la somme du signal utile et du bruit qui l'accompagne.

Pour le résoudre, on a calculé les probabilités a posteriori de la présence du signal aux différentes positions qu'il peut occuper en utilisant les expressions :

$$\frac{P_N(S, j)}{P_N(0)} = \frac{P_0(S, j)}{P_0(0)} \cdot \exp\left\{ \sum_{i=1+j}^{n+j} \frac{-V_{i-j}^2}{2B} \right\} \cdot \exp\left\{ \sum_{i=1+j}^{n+j} \frac{y_i \cdot V_{i-j}}{B} \right\}$$

et :

$$P_N(0) + \sum_{j=0}^{p-1} P_N(S, j) = 1$$

Dans le cas où les deux probabilités a priori $P_0(0)$ et $P_0(S, j)$ peuvent être fixées, cette méthode amène à la connaissance exacte des différentes probabilités a posteriori. On situe alors le signal à l'endroit où la probabilité $P_N(S, j)$ est maximale, ce qui revient à appliquer sur « j » un **critère de maximum de vraisemblance**, qui consiste à retenir la valeur estimée de « j » telle que :

$$\hat{j} \Rightarrow P_N(S, j) \rightarrow \text{MAXIMUM}$$

En remarquant que le maximum de $P_N(S, j)$ est aussi le maximum du rapport $P_N(S, j) / P_N(0)$, on retiendra donc dans le cas général comme **position présumée de « j »** :

$$\hat{j} \Rightarrow \frac{P_N(S, j)}{P_N(0)} \rightarrow \text{MAXIMUM}$$

Par ailleurs, on a établi que le calcul de ce rapport ne fait appel qu'aux « n » échantillons du signal composite pris sur la position présumée du signal, soit en désignant par P_n les probabilités calculées sur les seules positions présumées du signal :

$$\frac{P_N(S, j)}{P_N(0)} = \frac{P_n(S, j)}{P_n(0)}$$

Enfin, en reprenant le raisonnement du paragraphe 3.1.2 on pourra écrire :

$$P_n(S, j) = k \cdot P_0(S, j) \cdot \prod_{i=1}^n P(y_i / (S, j)) = k \cdot P_0(S, j) \cdot P_n(y / S, j)$$

$$P_n(0) = k \cdot P_0(0) \cdot \prod_{i=1}^n P(y_i / 0) = k \cdot P_0(0) \cdot P_n(y / 0)$$

$$\frac{P_n(S, j)}{P_n(0)} = \frac{P_0(S, j)}{P_0(0)} \cdot \frac{P_n(y / (S, j))}{P_n(y / 0)}$$

Les P_0 étant inconnus a priori mais constants, on pourra finalement retenir comme **position présumée du signal** :

$$\hat{j} \Rightarrow \frac{P_n(y / (S, j))}{P_n(y / 0)} \rightarrow \text{MAXIMUM}$$

Dans le cas présent, on peut vérifier que :

$$P_n(y/(S, j)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi B}} \cdot \exp\left\{ \sum_{i=1+j}^{n+j} \frac{-(y_i - V_{i-j})^2}{2B} \right\} \cdot \delta y$$

$$P_N(y/0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi B}} \cdot \exp\left\{ \sum_{i=1+j}^{n+j} \frac{-y_i^2}{2B} \right\} \cdot \delta y$$

$$\boxed{\frac{P_n(y/(S, j))}{P_n(0)} = \exp\left\{ \sum_{i=1}^n \frac{-V_i^2}{2B} \right\} \cdot \exp\left\{ \sum_{i=1+j}^{n+j} \frac{y_i \cdot V_{i-j}}{B} \right\}}$$

4.4 CAS DES SIGNAUX REELS CONTINUS

4.4.1 Etablissement du critère de détection

Le paragraphe précédent a permis de mettre en évidence un **estimateur de la présence d'un signal dans un bruit** basé sur le **critère de maximum de vraisemblance**, et de calculer son expression dans le cas où :

- le signal est un signal réel composé de « n » échantillons indépendants,
- à chaque échantillon du signal est superposé un échantillon d'un bruit réel, suivant une loi de Gauss,
- les échantillons de bruit sont également indépendants.

Dans le cas d'un **signal vidéofréquence continu** de bande ΔF et de durée T on pourra se ramener au cas précédent en prenant sur le signal $n = T \Delta F$ échantillons distants de $\delta t = 1/\Delta F$ (Cf. chapitre 16 § 4.3).

On se placera dans le cas d'un **bruit blanc limité à la bande du signal** de fonction de corrélation :

$$\rho_n(\tau) = \frac{\sin(\pi \Delta F \tau)}{\pi \Delta F \tau}$$

On constate que $\rho_n(k/\Delta F)$ est nul pour toutes les valeurs de $k \neq 0$. Les échantillons de bruit pris tous les $1/\Delta F$ sont donc décorréllés, on peut alors les considérer comme indépendants.

Ces conditions étant réunies, on posera:

$$t_i = i \cdot \delta t \quad t_0 = j \cdot \delta t$$

$$V_i = s(i \cdot \delta t) = s(t_i) \quad V_{i-j} = s(i \cdot \delta t - j \cdot \delta t) = s(t_i - t_0) \quad y_i = y(i \cdot \delta t) = y(t_i)$$

$$\frac{P_n(y/(s, t_0))}{P_n(0)} = \exp\left\{ \sum_{i=1}^n \frac{-s^2(t_i)}{2B} \right\} \cdot \exp\left\{ \sum_{i=1+j}^{n+j} \frac{y(t_i) \cdot s(t_i - t_0)}{B} \right\}$$

A la limite pour « n » grand, en se souvenant que $\delta t = 1/\Delta F$, on peut poser pour tout X :

$$\sum_1^n X(t_i) \cdot \delta t = \int_0^T X(t) \cdot dt \Rightarrow \sum_1^n X(t_i) = \Delta F \cdot \int_0^T X(t) \cdot dt$$

Le **retard estimé du signal** sera donc tel que :

- **en signal échantillonné :**

$$\hat{t}_0 \Rightarrow \frac{P_n(y/(s, t_0))}{P_n(0)} = \exp\left\{\sum_{i=1}^n \frac{-s^2(t_i)}{2B}\right\} \cdot \exp\left\{\sum_{i=1+j}^{n+j} \frac{y(t_i) \cdot s(t_i - t_0)}{B}\right\} \rightarrow \text{MAX}$$

- **en signal continu :**

$$\hat{t}_0 \Rightarrow \frac{P_n(y/(s, t_0))}{P_n(0)} = \exp\left\{\frac{\Delta F}{2B} \int_0^T s^2(t) \cdot dt\right\} \cdot \exp\left\{\frac{\Delta F}{B} \int_{t_0}^{t_0+T} y(t) \cdot s(t - t_0) \cdot dt\right\} \rightarrow \text{MAX}$$

4.4.2 Signal d'amplitude connue

Dans ce cas, le premier terme de l'expression est une constante connue. L'estimateur de « t_0 » se réduit donc à :

- **en signal échantillonné :**

$$\hat{t}_0 \Rightarrow \exp\left\{\sum_{i=1+j}^{n+j} \frac{y(t_i) \cdot s(t_i - t_0)}{B}\right\} \rightarrow \text{MAX}$$

- **en signal continu :**

$$\hat{t}_0 \Rightarrow \exp\left\{\frac{\Delta F}{B} \int_{t_0}^{t_0+T} y(t) \cdot s(t - t_0) \cdot dt\right\} \rightarrow \text{MAX}$$

C'est à dire que **les positions les plus probables du signal sont celles qui rendent maximale l'expression :**

- **en signal échantillonné :**

$$C(t_0) = \sum_{1+j}^{n+j} y(t_i) \cdot s(t_i - t_0)$$

- **en signal continu :**

$$C(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+T} y(t) \cdot s(t - t_0) \cdot dt$$

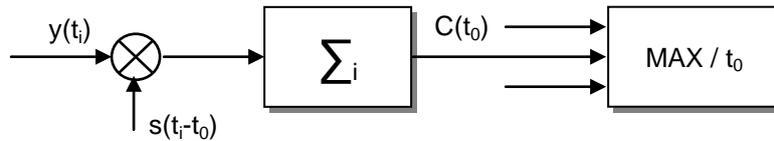
Ainsi, on peut conclure que l'on doit faire la **corrélation du signal reçu avec le signal émis retardé**, pour obtenir une expression :

- dont l'amplitude est représentative de la probabilité de présence d'une cible,
- dont les maximums correspondent aux positions les plus probables de cette cible.

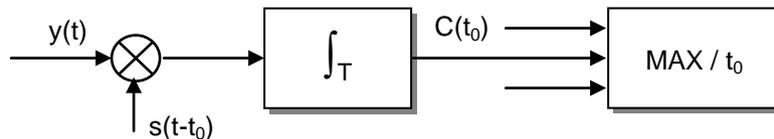
C'est la conclusion à laquelle aboutit Mr Michel CARPENTIER au chapitre 2 « *Signal et bruit – Récepteur optimal* » (§2.5) de son ouvrage « *Radar bases modernes* ».

Le récepteur réalisé sur ce principe, serait **optimal** (pour des signaux d'amplitude connue a priori), au sens du **critère du maximum de vraisemblance**. Son schéma fonctionnel est:

- **en signal échantillonné :**



- **en signal continu :**



Il faut alors disposer de « N » voies, espacées de $\delta t = 1/\Delta F$, pour toutes les valeurs de « t_0 » correspondant au domaine distance analysé.

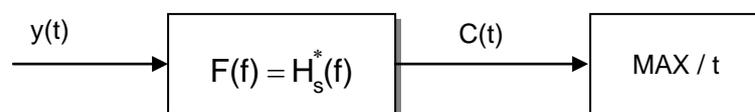
Par ailleurs en appliquant le théorème de corrélation (Cf. chapitre 16 § 2.3.1), on posera en se référant aux spectres des signaux en présence :

$$C(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+T} y(t) \cdot s(t - t_0) \cdot dt = \int H_y(f) \cdot H_s^*(f) \cdot \exp\{j2\pi f \cdot t_0\} \cdot df$$

Cette expression montre que le filtrage par un filtre adapté au signal : $F(f) = H_s^*(f)$ permet d'obtenir à une transposition temps-retard près l'expression $C(t_0)$.

Le signal $C(t)$ issu du filtre adapté au signal sera au cours du temps la représentation de $C(t_0)$. Il passera en temps réel par une valeur maximale représentative de la position de la cible.

D'où un **troisième schéma du récepteur optimum** :



4.4.3 Signal d'amplitude inconnue

Un signal d'amplitude inconnue peut être mis sous la forme :

$$s(t) = \gamma \cdot a(t)$$

Expression où "γ" est l'amplitude du signal, par rapport au signal de référence « $a(t)$ ».

L'estimateur de « t_0 » devient dans ce cas :

$$\hat{t}_0 \Rightarrow \exp\left\{ \frac{\Delta F}{2B} \cdot \gamma^2 \int_0^T a^2(t) \cdot dt \right\} \cdot \exp\left\{ \frac{\Delta F}{B} \cdot \gamma \int_{t_0}^{t_0+T} y(t) \cdot a(t - t_0) \cdot dt \right\} \rightarrow \text{MAX}$$

Mais le résultat trouvé dépend aussi de « γ ». Il conviendra donc de rechercher le couple (t_0, γ) maximisant l'expression précédente ou plus simplement son logarithme, soit, après élimination des constantes, d'écrire :

$$\left(\hat{t}_0, \gamma \right) \Rightarrow -\gamma^2 \int a^2(t) \cdot dt + 2\gamma \cdot \int y(t) \cdot a(t - t_0) \cdot dt \rightarrow \text{MAX}$$

On peut écrire :

$$\left(\gamma \sqrt{\int a^2(t) \cdot dt} - \frac{\int y(t) \cdot a(t - t_0) \cdot dt}{\sqrt{\int a^2(t) \cdot dt}} \right)^2 = \gamma^2 \int a^2(t) \cdot dt - 2\gamma \cdot \int y(t) \cdot a(t - t_0) \cdot dt + \frac{\left(\int y(t) \cdot a(t - t_0) \cdot dt \right)^2}{\int a^2(t) \cdot dt}$$

ce qui permet de transformer l'expression précédente en :

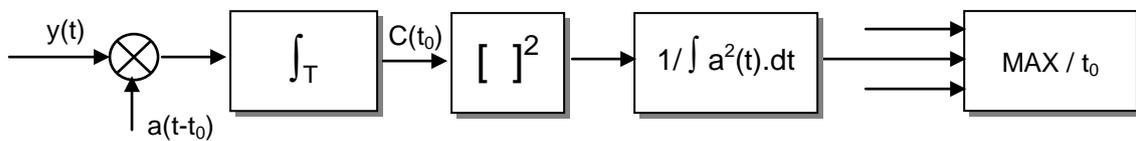
$$\left(\hat{t}_0, \gamma \right) \Rightarrow \left\langle - \left[\gamma \sqrt{\int a^2(t) \cdot dt} - \frac{\int y(t) \cdot a(t - t_0) \cdot dt}{\sqrt{\int a^2(t) \cdot dt}} \right]^2 + \frac{\left(\int y(t) \cdot a(t - t_0) \cdot dt \right)^2}{\int a^2(t) \cdot dt} \right\rangle \rightarrow \text{MAX}$$

Ce maximum sera atteint si le premier terme de l'expression est nul et le second maximum, ce qui définit séparément les deux estimateurs de « t_0 » et « γ » :

$$\hat{t}_0 \Rightarrow \frac{\left(\int y(t) \cdot a(t - t_0) \cdot dt \right)^2}{\int a^2(t) \cdot dt} \rightarrow \text{MAX}$$

$$\hat{\gamma} = \frac{\int y(t) \cdot a(t - \hat{t}_0) \cdot dt}{\int a^2(t) \cdot dt}$$

Le schéma de principe du récepteur optimum dans ce cas devient :



On constate une différence avec le récepteur optimum du cas précédent, liée à la perte de l'information sur l'amplitude du signal, l'opération de corrélation restant néanmoins l'opération de base amenant à ce récepteur optimum.

L'estimation optimale, au sens du maximum de vraisemblance revient donc, si on ne connaît pas a priori l'amplitude du signal recherché :

- à opérer la **corrélation** du signal reçu par le signal attendu,
- à prendre le **carré du module** du signal ainsi obtenu,
- à le **normer** par l'énergie du signal de référence,
- à **rechercher le maximum** sur ce signal normé.

5 DETECTION DES SIGNAUX COMPLEXES. APPLICATION AU RADAR

5.1 PRELIMINAIRE

Comme nous l'avons établi au chapitre 16 (§ 4.2.2), **les signaux radar ne sont connus ni en amplitude ni en phase**, du fait des effets de la propagation qui se soldent par :

- une atténuation complexe Γ , contenant la phase à l'origine,
- un retard t_0 ,
- une translation doppler f_D .

Le signal utile reçu par le radar est donc défini par l'expression :

$$s(t, \theta) = \Gamma \cdot Z(t - t_0) \cdot \exp\{j2\pi f_D \cdot t\}$$

expression dans laquelle « θ » est le vecteur de composantes : $\theta = [t_0, f_D]$.

nous introduirons, comme dans le paragraphe précédent, un signal de référence : « $a(t, \theta)$ », d'énergie quelconque a priori :

$$e = \int |a(t)|^2 dt$$

et écrivons **le signal vidéo complexe utile** perçu par le radar sous la forme :

$$s(t, \theta) = \gamma \cdot a(t, \theta) = \gamma \cdot a(t - t_0) \cdot \exp\{j2\pi f_D \cdot t\}$$

« γ » étant un nombre complexe représentatif de l'atténuation et du déphasage du signal, par rapport à la référence choisie.

A ce signal vidéo complexe est associé **un bruit blanc, vidéo complexe** :

$$N(t) = \alpha(t) + j \cdot \beta(t)$$

« α » et « β » étant deux variables aléatoires, gaussiennes de variance $\sigma^2 = B$, égale à puissance sous porteuse du bruit perçu par le radar.

On a établi au chapitre 16 (§ 3.7.3) que $N(t)$ est un **bruit gaussien complexe de densité de probabilité** :

$$f(N) = \frac{1}{2\pi B} \cdot \exp\left\{-\frac{|N|^2}{2B}\right\}$$

5.2 ETABLISSEMENT DU CRITERE DE DETECTION

5.2.1 Cas général

Le signal vidéo complexe perçu par le radar est la somme du signal utile et du bruit complexe.

$$z(t) = \gamma \cdot a(t, \theta) + N(t)$$

La communauté de forme entre les lois de probabilité des bruits gaussiens réels et complexes conduit à écrire (cf. § 3.1.1 et 3.2.2) :

$$P_n(z/(s, \theta)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi B}} \cdot \exp \left\{ \sum_{i=1+j}^{n+j} \frac{-|z(t_i) - \gamma \cdot a(t_i, \theta)|^2}{2B} \right\} \cdot \delta z$$

$$P_n(z/0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi B}} \cdot \exp \left\{ \sum_{i=1+j}^{n+j} \frac{-|z(t_i)|^2}{2B} \right\} \cdot \delta z$$

Soit comme :

$$|z(t_i) - \gamma \cdot a(t_i, \theta)|^2 = |z(t_i)|^2 - \gamma^* z(t_i) \cdot a^*(t_i, \theta) - \gamma \cdot z^*(t_i) \cdot a(t_i, \theta) + |\gamma|^2 |a(t_i, \theta)|^2$$

$$\frac{P_n(z/(s, \theta))}{P_n(z/0)} = \exp \left\{ \frac{1}{2B} \cdot \sum_i \left[-|\gamma|^2 |a(t_i, \theta)|^2 + \gamma^* z(t_i) \cdot a^*(t_i, \theta) + \gamma \cdot z^*(t_i) \cdot a(t_i, \theta) \right] \right\}$$

Soit en passant en variables continues :

$$\frac{P_n(z/(s, \theta))}{P_n(z/0)} = \exp \left\{ \frac{\Delta F}{2B} \left[-|\gamma|^2 \int_T |a(t, \theta)|^2 dt + \gamma^* \int_T z(t) \cdot a^*(t, \theta) \cdot dt + \gamma \int_T z^*(t) \cdot a(t, \theta) \cdot dt \right] \right\}$$

Rechercher le maximum de cette expression, ou de son logarithme, revient donc à rechercher le couple de valeurs de « θ » et « γ » qui maximise l'expression :

$$-|\gamma|^2 \int_T |a(t, \theta)|^2 dt + \gamma^* \int_T z(t) \cdot a^*(t, \theta) \cdot dt + \gamma \int_T z^*(t) \cdot a(t, \theta) \cdot dt$$

On note que, comme $e = \int [a(t)]^2 dt$ est un nombre réel positif, on peut écrire :

$$\left| \gamma \sqrt{e} - \frac{u}{\sqrt{e}} \right|^2 = \left(\gamma \sqrt{e} - \frac{u}{\sqrt{e}} \right) \cdot \left(\gamma^* \sqrt{e} - \frac{u^*}{\sqrt{e}} \right) = |\gamma|^2 e - \gamma^* u - \gamma \cdot u^* + \frac{|u|^2}{e}$$

Ce qui permet d'écrire la condition précédente sous la forme :

$$\left[\hat{\gamma}, \hat{\theta} \right] \Rightarrow \left\langle -\left| \gamma \cdot \sqrt{\int_T |a(t)|^2 dt} - \frac{\int_T z(t) \cdot a^*(t, \theta) \cdot dt}{\sqrt{\int_T |a(t)|^2 dt}} \right|^2 + \frac{\left| \int_T z(t) \cdot a^*(t, \theta) \cdot dt \right|^2}{\int_T |a(t)|^2 dt} \right\rangle \rightarrow \text{MAX}$$

Ce maximum ne peut être atteint que si les deux conditions suivantes sont remplies simultanément :

$$\hat{\theta} \Rightarrow \frac{\left| \int_T z(t) \cdot a^*(t, \theta) \cdot dt \right|^2}{\int_T |a(t)|^2 dt} \rightarrow \text{MAX}$$

$$\hat{\gamma} = \frac{\int_T z(t) \cdot a^*(t, \hat{\theta}) \cdot dt}{\int_T |a(t)|^2 dt}$$

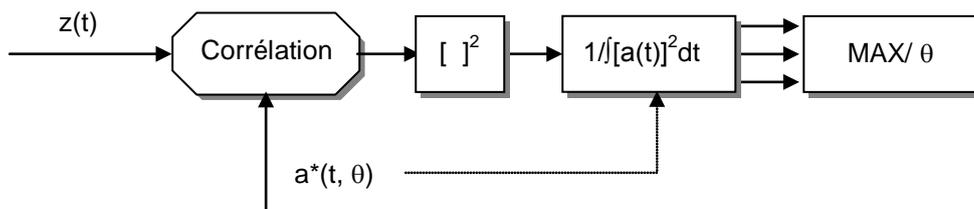
L'estimation optimale, au sens du maximum de vraisemblance revient donc, si on ne connaît pas a priori l'amplitude et la phase du signal recherché et en présence d'un bruit formé de deux composantes gaussiennes en quadrature :

- à opérer la **corrélation complexe** du signal reçu par le signal attendu,
- à prendre le **carré du module** du signal ainsi obtenu,
- à le **normer** par l'énergie du signal de référence,
- à **rechercher le maximum** sur ce signal normé.

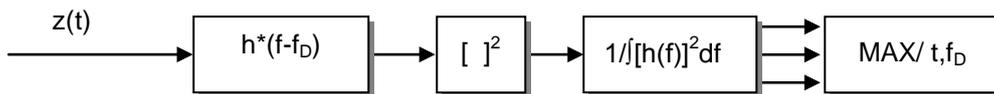
Par ailleurs, on peut vérifier que **ces résultats confirment** ceux établis par une approche physique au **chapitre 19** (§ 2).

D'où les **schémas de principe du récepteur optimum** dans le cas d'une **référence d'énergie quelconque** :

- **récepteur à corrélation** :



- **récepteur à filtre adapté** :



En remarquant que si « $h(f)$ » est le spectre de « $a(t)$ » l'énergie de la référence s'écrit :

$$e = \int |a(t)|^2 dt = \int |h(f)|^2 df$$

5.2.2 Cas où le signal de référence est d'énergie unitaire

Ces résultats se simplifient si la **référence est d'énergie unitaire** et deviennent :

$$\hat{\theta} \Rightarrow \left| \int_{.T} z(t) \cdot a^*(t, \theta) \cdot dt \right|^2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\hat{\gamma} = \int_{.T} z(t) \cdot a^*(t, \hat{\theta}) \cdot dt$$

L'estimation optimale, au sens du maximum de vraisemblance, revient donc ici à opérer la **corrélation complexe du signal reçu par le signal attendu** et à rechercher le **maximum du carré du module** du signal ainsi obtenu.

Ces résultats confirment les **schémas de récepteurs** : « *filtrage du signal suivie d'une détection quadratique* », adoptés au **chapitre 9** (§ 3 et 4) pour conduire à la notion de « *filtre adapté* », ainsi que **les conclusions du chapitre 17** (§ 1) concernant la « *notion intuitive de récepteur optimal* ».

6 RECEPTION OPTIMALE EN BRUIT COLORE

6.1 ETABLISSEMENT DU CRITERE DE DETECTION

Dans ce qui précède, nous avons établi un **estimateur optimal de la présence d'un signal dans un bruit** basé sur le **critère de maximum de vraisemblance** dans le cas où :

- le signal est composé de « n » échantillons indépendants tous les $\delta t = 1/\Delta F$;
- à chaque échantillon du signal est superposé un échantillon d'un bruit complexe formé de deux composantes en quadrature suivant une loi de Gauss ;
- les échantillons de bruit sont également indépendants.

ce qui supposait d'être en présence d'un bruit blanc, condition nécessaire pour que les échantillons pris tous les $\delta t = 1/\Delta F$ soient indépendants.

Cette condition n'est plus respectée si le bruit est coloré, il convient alors de reposer le problème, en conservant cependant la notion de bruit gaussien complexe.

Le signal vidéo complexe utile perçu par le radar reste de la forme :

$$s(t, \theta) = \gamma \cdot a(t, \theta) = \gamma \cdot a(t - t_0) \cdot \exp\{j2\pi f_D \cdot t\}$$

« γ » étant un nombre complexe représentatif de l'atténuation et du déphasage du signal, par rapport à la référence choisie.

A ce signal vidéo complexe est associé **le bruit vidéo complexe** :

$$N(t) = \alpha(t) + j \cdot \beta(t)$$

de densité de probabilité :

$$f(N) = \frac{1}{2\pi B} \cdot \exp\left\{-\frac{|N|^2}{2B}\right\}$$

défini par sa fonction d'autocorrélation :

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(f) \cdot \exp\{j2\pi f\tau\} \cdot df$$

sur lequel on prendra des échantillons indépendants « N_i »

On supposera a priori, en absence d'hypothèse particulière sur la manière de constituer ces échantillons indépendants, que chacun des échantillons de bruit peut avoir un écart type propre.

D'où la densité de probabilité d'un échantillon quelconque :

$$f(N_i) = \frac{1}{2\pi\sigma_i^2} \cdot \exp\left\{-\frac{|N_i|^2}{2\sigma_i^2}\right\}$$

Un échantillon du signal vidéo complexe perçu par le radar aura pour expression :

$$z(t_i) = \gamma \cdot a(t_i, \theta) + N(t_i), \text{ en présence du signal,}$$

$$z(t_i) = N(t_i), \text{ en absence de signal.}$$

On peut donc écrire les probabilités conditionnelles :

$$P(z_i / s_i) = \frac{1}{2\pi\sigma_i^2} \cdot \exp\left\{ -\frac{|z_i - \gamma \cdot a_i|^2}{2\sigma_i^2} \right\} \cdot dz$$

$$P(z_i / 0) = \frac{1}{2\pi\sigma_i^2} \cdot \exp\left\{ -\frac{|z_i|^2}{2\sigma_i^2} \right\} \cdot dz$$

Soit après « n » observations :

$$\frac{P_n(z/(s, \theta))}{P_n(0)} = \exp\left\{ -|\gamma|^2 \sum_1^n \frac{|a_i|^2}{2\sigma_i^2} + \gamma \cdot \sum_1^n \frac{a_i \cdot z_i^*}{2\sigma_i^2} + \gamma^* \sum_1^n \frac{a_i^* \cdot z_i}{2\sigma_i^2} \right\}$$

On posera :

$\sum_1^n \frac{ a_i ^2}{2\sigma_i^2} = \chi$	$\sum_1^n \frac{z_i \cdot a_i^*}{2\sigma_i^2} = \Gamma(\theta)$
---	---

Ce qui amène à écrire :

$$\frac{P_n(z/(s, \theta))}{P_n(0)} = \exp\left\{ -|\gamma|^2 \cdot \chi + \gamma^* \cdot \Gamma(\theta) + \gamma \cdot \Gamma^*(\theta) \right\}$$

Qui peut se mettre sous la forme (χ réel positif) :

$$\frac{P_n(z/(s, \theta))}{P_n(0)} = \exp\left\{ -\left| \gamma \cdot \sqrt{\chi} - \frac{\Gamma(\theta)}{\sqrt{\chi}} \right|^2 + \frac{|\Gamma(\theta)|^2}{\chi} \right\}$$

Expression qui passe par un maximum si les deux conditions suivantes sont réunies :

$$\hat{\theta} \Rightarrow \frac{|\Gamma(\theta)|^2}{\chi} \rightarrow \text{MAX}$$

$$\hat{\gamma} = \frac{\Gamma(\hat{\theta})}{\chi}$$

Il reste donc à calculer « $\Gamma(\theta)$ » et « χ »

6.2 CALCUL DES FONCTIONS « Γ » ET « χ »

6.2.1 Recherche d'une base pour les signaux étudiés (Cf. Chapitre 19-3 § 5.3)

Considérons un espace de Hilbert de fonctions « $X(t)$ » de durée « T », définies entre les instants « t_0 » et « $t_0 + T$ » et munies d'un produit scalaire :

$$(X, Y) = \sum x_i \cdot y_i^* = \int_{t_0}^{t_0+T} X(t) \cdot Y^*(t) \cdot dt$$

et d'une base formée des vecteurs « V_i » de valeurs propres réelles « λ_i » tels que :

$$\lambda_i \cdot V_i(\tau) = \int_{t_0}^{t_0+T} \rho(u - \tau) \cdot V_i(u) \cdot du$$

$\rho(\tau)$ étant la fonction d'autocorrélation du bruit $N(t)$, et on choisira en outre une base orthonormée telle que :

$$(V_i, V_j) = 1$$

$$(X, V_i) = x_i = \int_{.t_0}^{.t_0+T} X(t) \cdot V_i^*(t) \cdot dt$$

On écrira donc dans cette base :

$$a(t, \theta) = \sum a_i \cdot V_i(t)$$

$$N(t) = \sum N_i \cdot V_i(t)$$

$$z(t) = \sum z_i \cdot V_i(t)$$

6.2.2 Condition pour que la base soit représentative de $N(t)$

La fonction d'autocorrélation du bruit complexe $N(t)$ s'écrit (E : espérance mathématique) :

$$\rho(\tau) = E \left[N(t) \cdot N^*(t - \tau) \right]$$

Avec :

$$N(t) = \sum N_i \cdot V_i(t) \quad E \left[|N_i|^2 \right] = E \left[\alpha_i^2 + \beta_i^2 \right] = 2\sigma_i^2 \quad E \left[N_i \cdot N_j \right] = 0$$

$$\rho(\tau) = \sum_1^n 2\sigma_i^2 \cdot V_i(t) \cdot V_i^*(t - \tau)$$

On peut écrire par définition :

$$\lambda_i \cdot V_i^*(v) = \int_{.t_0}^{.t_0+T} \rho(u - v) \cdot V_i^*(u) \cdot du$$

Et formuler le produit scalaire, exprimant la projection de $\rho(u-v)$ sur le vecteur $V_i(u)$:

$$\rho_i = (\rho(u - v), V_i(u)) = \int_{.t_0}^{.t_0+T} \rho(u - v) \cdot V_i^*(u) \cdot du$$

D'où l'expression de ρ_i et de $\rho(u-v)$:

$$\rho_i = \lambda_i \cdot V_i^*(v)$$

$$\rho(u - v) = \sum_1^n \rho_i \cdot V_i(u) = \sum_1^n \lambda_i \cdot V_i(u) \cdot V_i^*(v)$$

Soit en posant : $u - v = \tau$, $u = t$ et $v = t - \tau$:

$$\rho(\tau) = \sum_1^n \lambda_i \cdot V_i(t) \cdot V_i^*(t - \tau)$$

Ce qui entraîne la propriété suivante :

$$2\sigma_i^2 = \lambda_i$$

6.2.3 Application au calcul des fonctions « Γ » et « χ »

a Calcul de « Γ »

$$\Gamma(\theta) = \sum_1^n \frac{z_i \cdot a_i^*}{2\sigma_i^2} = \sum_1^n z_i \cdot \left(\frac{a_i}{\lambda_i} \right)^*$$

Ce qui peut se mettre sous la forme :

$$\Gamma(\theta) = (z(t), R(t)) = \int_{t_0}^{t_0+T} z(t) \cdot R^*(t) \cdot dt$$

Avec :

$$R(t) = \sum \frac{a_i}{\lambda_i} \cdot V_i(t)$$

b Calcul de χ

$$\chi = \sum_1^n \frac{|a_i|^2}{2\sigma_i^2} = \sum_1^n a_i \cdot \left(\frac{a_i}{\lambda_i} \right)^*$$

$$\chi = (a(t, \theta), R(t)) = \int_{t_0}^{t_0+T} a(t, \theta) \cdot R^*(t) \cdot dt$$

c Liaison à la fonction de corrélation du bruit

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \rho(u-t) \cdot R(u) \cdot du = \sum \frac{a_i}{\lambda_i} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} \rho(u-t) \cdot V_i(u) \cdot du = \sum \frac{a_i}{\lambda_i} \cdot \lambda_i \cdot V_i(t) = \sum a_i \cdot V_i(t)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \rho(u-t) \cdot R(u) \cdot du = a(t, \theta)$$

d Récapitulation des résultats

$$\Gamma(\theta) = \int_{t_0}^{t_0+T} z(t) \cdot R^*(t) \cdot dt$$

$$\chi = \int_{t_0}^{t_0+T} a(t, \theta) \cdot R^*(t) \cdot dt$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \rho(u-t) \cdot R(u) \cdot du = a(t, \theta)$$

6.3 CAS D'UN BRUIT BLANC

Un bruit blanc est de bande infinie, on peut donc écrire :

$$\rho(u-t) = \delta(u-t)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \delta(u-t) \cdot R(u) \cdot du = R(t)$$

$$R(t) = a(t, \theta)$$

$$\Gamma(\theta) = \int_{t_0}^{t_0+T} z(t) \cdot a^*(t, \theta) \cdot dt$$

$$\chi = \int_{t_0}^{t_0+T} a(t, \theta) \cdot a^*(t, \theta) \cdot dt$$

$$\chi = \int_0^T |a(t)|^2 \cdot dt$$

Ces résultats confirment ceux du paragraphe 4.2

6.4 CAS D'UN BRUIT COLORE

6.4.1 Etablissement des conditions de détection

Si « $H_R(f)$ » est le spectre de « $R(t)$ » $h_a(f)$ le spectre de $a(t, \theta)$ et $\Phi(f)$ la densité spectrale du bruit on peut écrire :

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \rho(u-t) \cdot R(u) \cdot du = a(t, \theta)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} R(u) \cdot \rho(u-t) \cdot du = \int_{-\infty}^{+\infty} H_R(f) \cdot \Phi(f) \cdot \exp\{j2\pi f \cdot t\} \cdot df$$

$$a(t, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_a(f - f_0) \cdot \exp\{j2\pi(f - f_0)(t - t_0)\} \cdot df = \int_{-\infty}^{+\infty} h_a(f, \theta) \cdot \exp\{j2\pi f \cdot t\} \cdot df$$

Il en résulte que :

$$H_R^*(f) = \frac{h_a^*(f, \theta)}{\Phi(f)}$$

$$\Gamma(\theta) = \int_{t_0}^{t_0+T} z(t) \cdot R^*(t, \theta) \cdot dt$$

La réplique à utiliser en présence d'un bruit coloré est la référence utilisée en bruit blanc, après passage dans un filtre de transmittance : $1/\Phi(f)$, où $\Phi(f)$ est la densité spectrale du bruit coloré.

On a par ailleurs :

$$\chi = \int_{t_0}^{t_0+T} a(t, \theta) \cdot R^*(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h_a(f, \theta) \cdot \frac{h_a^*(f, \theta)}{\Phi(f)} \cdot df$$

$$\chi = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{h_a(f)}{\sqrt{\Phi(f)}} \right|^2 \cdot df = \int_0^T |a_b(t)|^2 \cdot dt$$

Le terme de normalisation à utiliser en présence d'un bruit coloré est l'énergie d'un signal obtenu en filtrant la référence par un filtre de transmittance $1/\sqrt{\Phi(f)}$.

Le maximum de vraisemblance est alors atteint si les deux conditions suivantes sont remplies simultanément :

$$\hat{\theta} \Rightarrow \frac{\left| \int_{t_0}^{t_0+T} z(t) \cdot R^*(t, \theta) \cdot dt \right|^2}{\int_{t_0}^{t_0+T} |a_b(t)|^2 \cdot dt} \rightarrow \text{MAX}$$

$$\hat{\gamma} = \frac{\int_{-T}^T z(t) \cdot R^*(t, \hat{\theta}) \cdot dt}{\int_{-T}^T |a_b(t)|^2 dt}$$

6.4.2 1^{er} interprétation spectrale des résultats, filtre « superblanchissant »

Revenons à la fonction de corrélation du signal, en se souvenant que « θ » est le couple formé du retard « t_0 » et du décalage doppler « f_D » ce qui permet d'écrire :

$$\Gamma(t_0, f_D) = \int_{t_0}^{t_0+T} z(t) \cdot R^*(t, (t_0, f_D)) \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} H_z(f) \cdot \frac{h_a^*(f - f_D)}{\Phi(f)} \cdot \exp\{j2\pi t_0 f\} \cdot df$$

Sous cette forme, on met en évidence, que le **filtre optimum capable de réaliser une réception optimale en présence d'un bruit coloré** a pour expression :

$$F(f) = \frac{h_a^*(f - f_D)}{\Phi(f)}$$

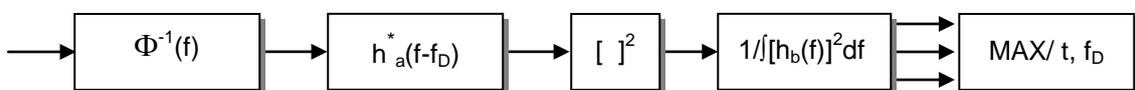
Un tel filtrage peut parfaitement être réalisé par la mise en cascade de deux filtres, le filtre apportant la correction nécessaire du fait de la coloration du bruit « $1/\Phi(f)$ » et un filtre adapté classique de transmittance liée à la référence « $[h_a(f-f_D)]^*$ ».

Par ailleurs, l'énergie du terme de normalisation est définie par :

$$\chi = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{h_a(f)}{\sqrt{\Phi(f)}} \right|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |h_b(f)|^2 df$$

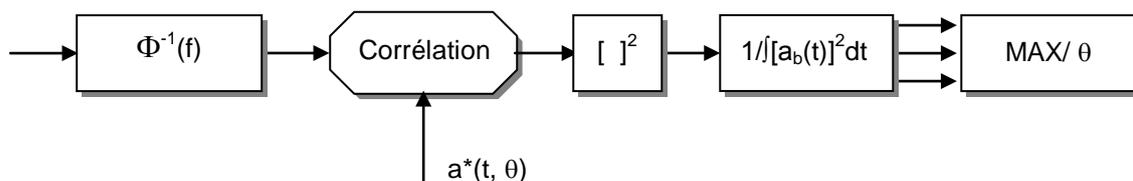
Ces considérations amènent au schéma suivant connu sous le nom de :

Filtre superblanchissant et filtre adapté au signal



et à son équivalent, dans lequel une corrélation par la référence du signal est substituée au filtre adapté :

Filtre superblanchissant et corrélation adaptée au signal



6.4.3 2^{ème} interprétation spectrale des résultats, filtre « blanchissant »

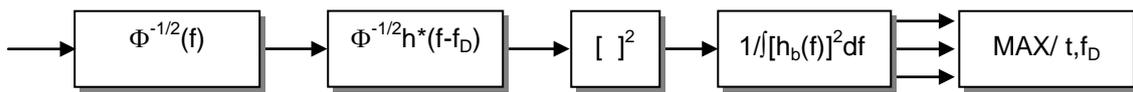
La fonction de corrélation du signal peut également s'écrire :

$$\Gamma(t_0, f_D) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_z(f) \cdot \frac{h_a^*(f - f_D)}{\Phi(f)} \cdot \exp\{j2\pi t_0 f\} \cdot df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_z(f)}{\sqrt{\Phi(f)}} \cdot \frac{h_a^*(f - f_D)}{\sqrt{\Phi(f)}} \cdot \exp\{j2\pi t_0 f\} \cdot df$$

Sous cette forme, la correction liée à la coloration du bruit est répartie sur un pré-filtrage préalable par un filtre de transmittance $1/\sqrt{\Phi(f)}$, suivi d'un filtrage par le filtre adapté corrigé de la même valeur. On note au passage que ce pré-filtrage a pour propriété de « blanchir » le bruit avant présentation au filtrage adapté.

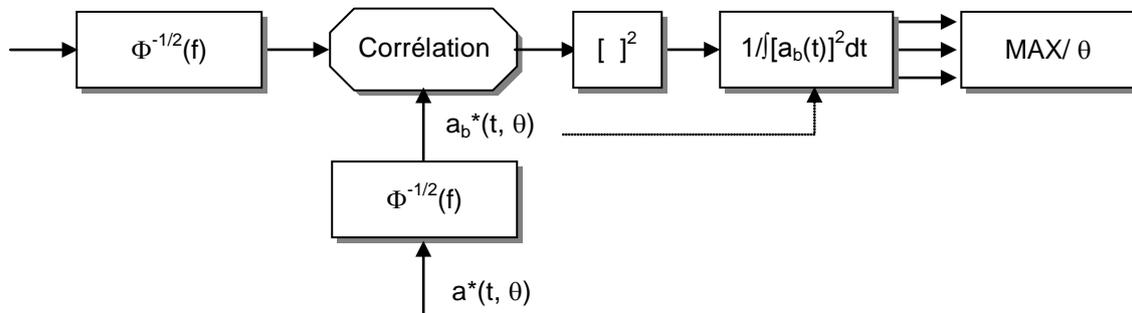
D'ou le second schéma de filtrage en bruit coloré, connu sous le nom de :

Filtre blanchissant et filtrage adapté au signal modifié



et son équivalent en corrélation :

Filtre blanchissant et corrélation adaptée au signal modifié



Ces résultats corroborent exactement ceux issus de l'approche physique de la « réception optimale en bruit coloré » exposée au chapitre 19 (§ 3) et démontrent qu'il s'agit bien de schémas aboutissant à une détection optimale.

On peut donc conclure que l'approche physique choisie aux chapitres 9, 17 et 19, est confirmée par cette théorie plus générale.
